

## Papierhubschrauber

Von Hans Joachim Schlichting und Bernd Rodewald

### Rotierende Papierflieger als Unterrichtsgegenstand

Papierflieger sind zum Leidwesen vieler Lehrer bei den Schülern sehr beliebt. Man wird daher sicherlich auf deren Interesse stoßen, wenn man Papierflieger zum Gegenstand des Unterrichts macht.

Besonders reizvoll erscheint uns insbesondere der Papierhubschrauber; den wir hier betrachten wollen. Es handelt sich um einen Flieger, der einfach losgelassen wird und - sich um die eigene Achse drehend - langsam zu Boden geht. Er ähnelt damit den Flugsamen mancher Pflanzen (z. B. den Ahornsamen; [1], [2]).

Gemeinsam ist diesen Flugobjekten nicht nur der faszinierende Mechanismus, durch den die Rotation „angeworfen“ und gesteuert wird, sondern auch die bemerkenswerte Stabilität und Präzision, mit der der „Flug“ abläuft.

Das führt zu einer Reihe physikalisch interessanter Fragen:

- Warum fällt das jeweilige Objekt nicht wie ein Stein?
- Wieso schaukelt sich die Rotation nicht ad infinitum auf?
- Welche Mechanismen regulieren den stationären Flugzustand?
- Wie lassen sich die Zustandsparameter des stationären Flugs beeinflussen?

Wir werden diese Fragen an dieser Stelle für den Papierhubschrauber (P.H.) beantworten, welcher trotz seiner vielseitigen physikalischen Aspekte unseres Wissens bisher noch nicht in der didaktischen Literatur diskutiert wurde. Die Antworten werden in ihrer qualitativen Form im Grenzfall sehr schmaler Flügel auf den Ahornsamen übertragbar sein.

Der P. H. ist leicht und billig herstellbar und damit für Schülerversuche hervorragend geeignet. Er ist problemlos variierbar und auf definierte Weise manipulierbar. Dieses betrifft vor allem sein Gewicht, die Flügellänge, die Flügelbreite, die Flügelrichtung, die Form etc.

Die Konstruktion des P.H. ist einfach und z. B. in [3] beschrieben. Abb. 1 liefert einen Konstruktionsplan:

Aus den beiden Hälften des oberen Papierstreifens werden durch Knicken nach vorn und nach hinten die Flügel; aus dem unteren Teil entsteht durch Umlegen der Seitenteile zur Mitte und (evtl. mehrmaliges) Umfalten des dabei entstehenden Fußendes der Rumpf. Die Abmessungen der Teile sind relativ weit variierbar und für das Flugverhalten unkritisch.

### Die Fallbewegung des Papierhubschraubers

Der P.H. lässt sich durch drei Zustandsparameter kennzeichnen: durch die Sinkgeschwindigkeit  $v_s$ , die Drehfrequenz  $\omega$  und den Winkel  $\alpha$ , welcher die Richtung der Flügel relativ zur Lotrechten angibt. Wir werden zur Bestimmung der Phänomene im folgenden ein mit dem P.H. bewegtes Bezugssystem benutzen und zunächst den Sinkvorgang genauer betrachten.

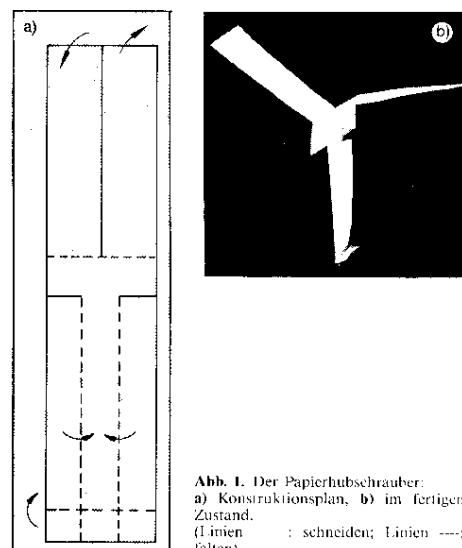


Abb. 1. Der Papierhubschrauber:  
a) Konstruktionsplan, b) im fertigen Zustand.  
(Linien : schneiden; Linien ----: falten)

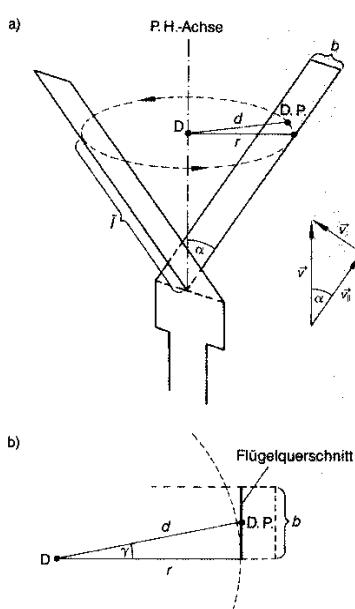
Fällt der P.H. im Labor mit einer Sinkgeschwindigkeit vom Betrage  $v_s$ , so wird im mitbewegten Bezugssystem ein Luftstrom nach oben registriert, dessen Geschwindigkeit ebenfalls die Größe  $v_s$  hat. Dieser Luftstrom behält i. w. seine Richtung bei, wird allerdings durch die Wechselwirkung mit dem Flieger schließlich auf die Geschwindigkeit  $v_e$  abgebremst. Auf die Luft wirkt also eine Kraft, welche als reactio eine nach oben gerichtete Kraft auf den P.H. zur Folge hat. Vom Laborsystem aus betrachtet wirkt sie der Gewichtskraft

$\vec{F}_G$  des Fliegers entgegen. Im Verlauf der Fallbewegung wird sie schließlich so groß, daß  $\vec{F}_G$  vollständig kompensiert wird: Dann fällt der P.H. kräftefrei und demzufolge mit konstanter Sinkgeschwindigkeit.

Die Abbremsung der anströmenden Luft erfolgt i. w. durch die Flügel des P.H., also innerhalb eines größeren Raumbereichs. Man kann jedoch den Wind und seine Wirkungen auf die Flügel in jeweils einem Punkt, dem sog. Druckpunkt, angreifend denken. (Die Konstruktion dieses Punktes ist der Konstruktion des Schwerpunktes ähnlich; siehe z. B. [4].)

Haben die Flügel die Länge  $l$ , so habe der jeweilige Druckpunkt (D.P.) den Abstand  $\tilde{l} = pl$  ( $0 \leq p \leq 1$ ) zur Rumpfoberkante des P.H. (Abb. 2). Sein Abstand zur senkrechten Mittelachse des P.H. (zum Punkt D) sei d. d. hängt über  $r = \tilde{l} \cdot \sin\alpha$  vom Winkel  $\alpha$  ab, welcher die Richtung des jeweiligen Flügels angibt.  $r$  ist dabei der Radius eines Kreises in Höhe der Druckpunkte, an dem die Flügel tangential anliegen.

Genauer entnimmt man der Abb. 2 für d Beziehung



**Abb. 2:** Geometrie des Papierhubschraubers und die auftretenden Windgeschwindigkeiten (s. Text);  
a) perspektivische Darstellung, b) Darstellung der Verhältnisse am Flügel aus der Vogelperspektive

$$d = \frac{r}{\cos \gamma} \quad (1)$$

wobei  $\gamma$  durch

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{b/2}{r} \quad (2)$$

mit  $b$  als Flügelbreite festgelegt ist. Mit der Abkürzung

$$q = \frac{r}{\tilde{l}} = \sin \alpha \quad (3)$$

lässt sich Gl.(2) auch in der Form

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{b}{2pl \cdot q} \quad (4)$$

angeben. Grundsätzlich ist dabei die Größe von  $p$  bzw.  $\tilde{l}$  (d. h. die Lage des Druckpunktes) vom jeweils herrschenden Strömungsfeld abhängig. Hier sei jedoch idealerweise angenommen, daß die Lagevariationen des Druckpunktes hinreichend klein, zumindest jedoch vernachlässigbar sind gegenüber allen anderen auftretenden Parametervariationen, so daß  $p$  bzw.  $\tilde{l}$  näherungsweise als konstant angesehen werden kann.  $\bar{v}$  bezeichnet die Geschwindigkeit der den P.H. durchströmenden Luft in der Höhe der Flügeldruckpunkte. Ein plausibler Ansatz für die Größe von  $\bar{v}$  ist dann das arithmetische Mittel aus  $v_s$  und  $v_e$ . (Dieses ist in der Windmühlentheorie üblich; siehe z. B. [5]):

$$v = \frac{1}{2}(v_s + v_e) \quad (5)$$

$$v = \frac{1}{2}(1+k) \quad \text{mit } k = \frac{v_e}{v_s}$$

Es ist bei Ahornsamen empirisch bestätigt, daß das Geschwindigkeitsverhältnis  $k$  ( $0 \leq k \leq 1$ ) näherungsweise als Konstante angesehen werden kann, so daß also  $v \sim v_s$  [6]. Wir setzen diese Zusammenhänge auch für den P.H. als gültig voraus. Die extremalen Werte 0 und 1 für  $k$  sind allerdings relativ unreal:  $k = 1$  bedeutet keine Geschwindigkeitsänderung der Luft und damit keinerlei abbremsende Kraft auf den P.H.;  $k = 0$  bedeutet, daß sich die Luft hinter den Flügeln des P.H. staut und damit nichts mehr nachströmen kann, so daß die Einströmgeschwindigkeit ebenfalls zu 0 wird. Der reale Wert wird - je nach Bauweise des Flugobjekts - irgendwo zwischen den beiden Grenzfällen liegen.

In Abb. 2 ist der Vektor  $\bar{v}$  eine zum Flügel parallele  $\bar{v}_{\parallel}$  und eine zum Flügel senkrechte Komponente  $\bar{v}_{\perp}$  zerlegt. Für die folgenden Überlegungen ist vor allem  $\bar{v}_{\perp}$  bedeutsam. Nach Gl. (5) gilt:

$$\bar{v}_{\perp} = v \cdot \sin \alpha = v_s \cdot \frac{1+k}{2} \cdot q \quad (6)$$

# Die Rotation des Papierhubschraubers

## Das Einsetzen der Rotation

Man kann sich fragen, warum sich der P.H. nicht wie ein Stein verhält, d. h. nach anfänglicher Beschleunigung schließlich mit konstanter Geschwindigkeit  $v_s$  zu Boden fällt, ohne dabei zu rotieren ( $\omega = 0$ ).

Zwar gelingt es mitunter, den P.H. ohne Rotation fallen ~ lassen, wenn dafür Sorge getragen wird, daß die Flügel vertikal ausgerichtet sind ( $\alpha = 0$ ). In diesem Fall strömt die Luft parallel an den Flügeln vorbei ( $\vec{v}_\perp = 0$ ), und es tritt folglich keine Wechselwirkung auf, die eine Rotation hervorrufen könnte. (Dabei vernachlässigen wir den durch den Parallelstrom am Flügelende induzierten Widerstand.)

Allerdings ist dieser Zustand ( $v_s = \text{konst.}$ ,  $\omega = 0$ ,  $\alpha = 0$ ) nicht stabil. Bereits kleinste Abweichungen von  $\alpha = 0$ , die durch stets vorhandene Störungen bedingt sein können, führen zu einer Wechselwirkung mit der Luft ( $\vec{v}_\perp > 0$ ). Als Folge davon tritt eine Kraft am Flügel auf, welche nicht - wie man naiverweise vielleicht erwartet - die Flügel zusammendrückt, sondern ganz im Gegenteil eine Rotation anfacht und als eine Folge davon die Flügel noch weiter öffnet.

Um zu verstehen, wie ein Drehmoment am P.H. entstehen kann, betrachten wir die Vorgänge anhand von Abb. 3 etwas genauer.

Die mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_\perp$  die Flügel anströmende Luft bewirkt im Druckpunkt des einen Flügels eine Luftkraft  $\vec{F}_L$  und am anderen Flügel die betragmäßig gleiche Kraft  $\vec{F}'_L$ . Die Richtung von, ist insofern durch die Richtung von  $\vec{v}_\perp$  bestimmt, als diese Kraft in einer Ebene liegt, welche senkrecht zum Flügel steht und durch den Druckpunkt geht. (Diese Ebene ist in Abb. 3a) mit E bezeichnet.)

Im einfachsten Fall einer symmetrischen Umströmung der Flügel stehen  $\vec{F}_L$  und  $\vec{F}'_L$  darüber hinaus sogar zunächst senkrecht zum Flügel, so daß sich in der Aufsicht das Bild der Abb. 3b ergibt. Dabei sind mit  $\vec{F}_{L,H}$  und  $\vec{F}'_{L,H}$  die Horizontalkomponenten der Luftkräfte  $\vec{F}_L$  und  $\vec{F}'_L$  zu sehen. Der eingezzeichnete Kreis mit Radius  $r$  wurde bereits weiter oben (vgl. Abb. 2) eingeführt.

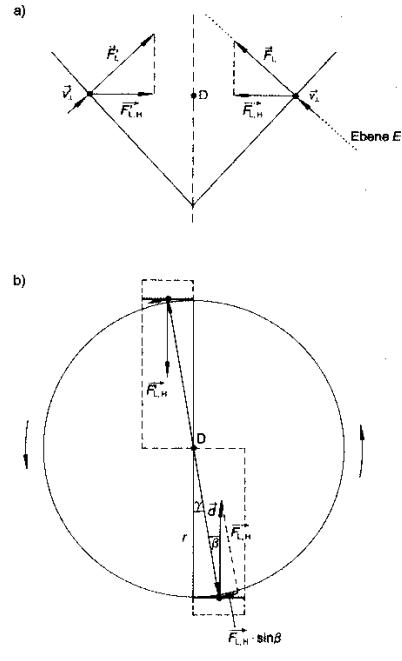
Man entnimmt der Abb. 3b, daß an den Flügeln des P.H. ein Kräftepaar vorhanden ist, welches ein

Drehmoment um den Drehpunkt D wirkt. Dieses entsteht unabhängig von der Größe von  $\alpha$  und kommt offensichtlich dadurch zustande, daß die Flügel nicht achsensymmetrisch, sondern punktsymmetrisch zueinander liegen.

Für das Drehmoment M ergibt sich

$$M = d \cdot F_{L,H} \cdot \sin \beta \quad (7)$$

Dabei ist  $\vec{F}_{L,H} \cdot \sin \beta$  die für das Moment wirksame Kraftkomponente. Sie steht senkrecht auf dem Richtungsvektor  $\vec{d}$ , welcher vom Drehpunkt zum Druckpunkt weist und die Länge  $d$  hat. (In Abb. 3 ist der Winkel  $\beta$  zwischen  $\vec{d}$  und  $\vec{F}_{L,H}$  genauso groß wie  $\gamma$ , da  $\vec{F}_L$  hier senkrecht auf dem Flügel



**Abb. 3:** Luftkräfte an den Flügeln kurz vor Einsetzen der Rotation

a) Seitenansicht, b) Aufsicht

steht und  $\vec{F}_{L,H}$  damit in eine zum Flügelquerschnitt senkrechte Richtung weist.) Solange die Vektoren  $\vec{d}$  und  $\vec{F}_{L,H}$  nicht übereinander liegen, ist diese Kraftkomponente von Null verschieden und führt damit zur Anfachung einer Rotation (in Abb. 3b) entgegen dem Uhrzeigersinn). Da darüber hinaus als Folge auch  $\alpha$  wächst, entfernt sich der P.H. immer mehr vom stationären Zustand ( $v_s = \text{konst.}$ ,  $\omega = 0$ ,  $\alpha = 0$ ). Dieser ist also instabil.

Die Begrenzung der Drehfrequenz

Da eine solche Aufschaukelung sich nicht endlos fortsetzen kann, sondern erfahrungsgemäß in einem stationären Endzustand mündet, stellt sich die Frage nach den begrenzenden Effekten.

Mit zunehmender Rotationsfrequenz weicht - vom P.H. ausgesehen - die „Windrichtung“ immer mehr von der durch  $\vec{v}_\perp$  gegebenen Richtung ab (Abb. 4). Bezeichnet man die Geschwindigkeit dieses „Windes“ mit  $\vec{v}_w$ , so setzt sie sich nämlich aus zwei Anteilen zusammen: aus der bereits erklärten Geschwindigkeit  $\vec{v}_\perp$  und einer horizontalen, parallel zum Flügelquerschnitt orientierten Geschwindigkeit  $\vec{v}_h$ . Sie kommt durch die Rotation zustande.

$$\text{Somit gilt: } v_h = \omega r \quad (8)$$

$v_h$  vergrößert sich also mit  $\omega$ , und da  $\vec{v}_\perp$  mit  $v_s$  wächst folgt hieraus zunächst einmal, daß die Luftkraft  $\vec{F}_L$  (analog  $\vec{F}_L'$ ) zu Beginn des Falls betragsmäßig wächst.

Neben dem Betrag ändert sich jedoch auch die Richtung von  $\vec{F}_L$ .

Wir erläutern dieses für die Phase des Falls, wo die Sinkgeschwindigkeit des P.H. bereits in der Nähe des stationären Wertes liegt. Dann vergrößert sich  $v_\perp$  kaum noch, während  $v_h$  bei nichtver schwindendem Drehmoment  $M$  immer größer wird.

Abb. 4 veranschaulicht die Auswirkungen auf die Luftkraft  $\vec{F}_L$  in der oben definierten Ebene e

(analog für  $\vec{F}_L'$  am anderen Flügel). Die Situation unterscheidet sich von dem in Abb. 3 dargestellten Fall, in dem sich  $\vec{F}_L$  nur als Widerstand bemerkbar macht, da  $\vec{F}_L$  dort in Richtung des wirksamen „Windes“ zeigt, in die per Definition auch die sogenannte Widerstandskraft,  $\vec{F}_W$  weist.

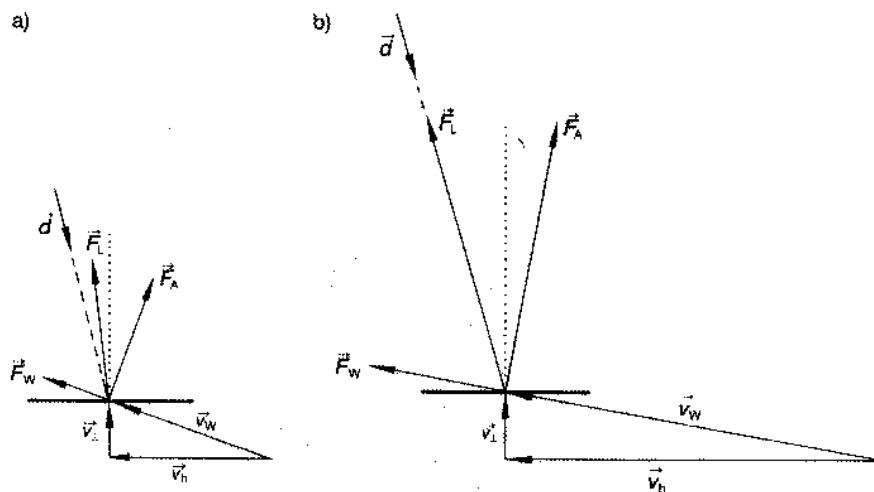
In Abb. 4 dagegen steht wegen  $v_h \neq 0$  der wirksame „Wind“ nicht mehr senkrecht auf dem Flügel, weshalb sich an ihm auch eine Kraft senkrecht zur Windrichtung, die sogenannte Auftriebskraft  $\vec{F}_A$ , bemerkbar macht. Dementsprechend ist hier  $\vec{F}_L \neq \vec{F}_W$ ; viel mehr gilt:

$$\vec{F}_L = \vec{F}_A + \vec{F}_W \quad (9)$$

Abb. 4 verdeutlicht den Effekt einer zunehmend größer werdenden horizontalen Geschwindigkeitskomponente infolge einer sich aufschauenden Drehfrequenz: Geht man davon aus, daß das Verhältnis von Auftriebs und Widerstandskraft

$$\delta = \frac{F_A}{F_W} = \frac{c_A}{c_W} \quad (10)$$

näherungsweise als konstant angesehen werden kann) so wird bei zunehmender Horizontalkomponente des „Windes“ mit  $\vec{F}_W$  auch  $\vec{F}_L$  immer stärker nach links „gekippt“ ( $c_A$  = Auftriebsbeiwert;  $c_W$  = Widerstandsbeiwert; siehe z. B. [4]). Fällt schließlich der „Wind“ hinreichend flach auf den Flügel ein, so kommt  $\vec{F}_L$  über dem weiter oben definierten Vektor  $\vec{d}$  zu liegen (Abb. 4b). Dann ist die Horizontalalkomponente  $\vec{F}_{L,H}$  von  $\vec{F}_L$



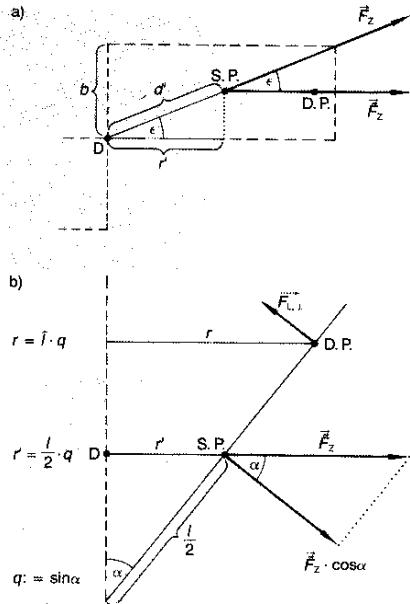
**Abb. 4:** Abhängigkeit der Richtung  $\vec{F}_L$  von der horizontalen Geschwindigkeit  $v_h$  und damit von  $\omega$ . Geht man von Abb. a) zu Abb. b) über, so wird  $v_h$ , größer und dementsprechend  $\vec{F}_L$  stärker nach links zum Vektor  $\vec{d}$  „gekippt“. In Abb. b) liegt  $\vec{F}_L$  über  $\vec{d}$ .

antiparallel zu  $\vec{d}$  gerichtet, was  $\beta = 0$  und demzufolge  $M = 0$  bedeutet. Daher wird  $\omega$  nicht beliebig groß, sondern kann nur solange wachsen, bis dieses verschwindende Drehmoment  $\omega\alpha$  eingestellt hat.

## Die Stellung der Flügel

Wir haben bereits angedeutet, daß eine vertikale Ausrichtung der Flügel nicht stabil ist. In der Tat beobachtet man, daß  $\alpha$  merklich schnell anwächst und in der Regel Werte um  $80^\circ$  erreicht.

Wieso öffnen sich also die Flügel, so daß  $\alpha = 0$  eine instabile Flugstruktur darstellt? Der Grund



**Abb. 5:** Kräfte am Flügel, welche den Winkel  $\alpha$  beeinflussen (D.P. = Druckpunkt, S. P. Flügelschwerpunkt):

a) Aufsicht, b) Seitenansicht.

liegt im Auftreten einer Zentrifugalkraft  $\vec{F}_Z$  mit

$$F_Z = m_{Fl} \cdot d' \cdot \omega^2 \quad (11)$$

welche im Schwerpunkt des Flügels angreift, sobald die Rotation eingesetzt hat ( $m_{Fl}$  ist die Masse eines Flügels;  $d'$  bezeichnet nach Abb. 5 den Abstand des Flügelschwerpunktes von der Drehachse). Die Kraft  $\vec{F}_Z$  versucht, den Flügel um die Knicklinie am Rumpf nach unten zu drehen, während die Luftkraft  $\vec{F}_L$  den Flügel aufzurichten versucht. Genauer ergibt sich das folgende Bild:

Entscheidend für das im Uhrzeigersinn drehende Moment ist die senkrecht auf dem Flügel stehende Komponente  $\tilde{F}_z \cos \alpha$  der Zentrifugalkraft, und entscheidend für das entgegengesetzt drehende Moment ist die senkrecht auf dem Flügel stehende

Komponente  $\vec{F}_{L,\perp}$  der Luftkraft  $\vec{F}_L$ . (Bem.: In Abb. 3a) ist die spezielle Situation  $\vec{F}_L = \vec{F}_{L,\perp}$  dargestellt.)

$\alpha$  vergrößert sich dann, wenn

$$\tilde{F} \cdot \cos \alpha \cdot \frac{1}{2} > F_{F,\perp} \cdot \tilde{l}. \quad (12)$$

Diese Ungleichung ist aber gerade für kleine Winkel  $\alpha$  gut erfüllt. Denn im Grenzfall  $\alpha \rightarrow \infty$  strebt die rechte Seite von (12) wegen  $\vec{F}_{L,\perp} \sim v_\perp^2$  und  $v_\perp \sim \sin \alpha$  mit  $\sin^2 \alpha$  gegen Null, während die linke Seite wegen  $\tilde{F}_z = F_Z \cdot \cos \epsilon$ ,  $\cos \epsilon = \frac{r'}{d'} \sim \sin \alpha$  und  $F_Z$  nach Gl.(11) nur mit  $\sin \alpha$  gegen Null strebt, wenn das Vorhandensein einer Drehung einmal vorausgesetzt wird ( $\omega \neq 0$ ). Der Zustand  $\alpha = 0$  ist also instabil, die Flügel weiten sich auf.

Ähnlich wie bei der Diskussion der Drehfrequenz hat auch das Wachstum von  $\alpha$  seine Grenze. Sie ist dann erreicht, wenn in (12) das Gleichheitszeichen steht. Dieses ist bei hinreichend großem  $a$  der Fall, da die rechte Seite von (12) mit wachsendem  $a$  durch die damit verbundene Vergrößerung von  $v_\perp$  wächst, während die linke Seite wegen des  $\cos$ -Faktors immer kleiner wird. Hieraus folgt insbesondere, daß  $\alpha$  niemals  $90^\circ$  werden kann.

## Die Stabilität des stationären Zustands

Die Ausführungen in den vorangegangenen Abschnitten liefern eine physikalische Begründung dafür warum der P.H. schließlich einen stationären Zustand mit wohldefinierten Werten der Zustandsparameter  $v_s$ ,  $\omega$  und  $\alpha$  erreicht.

Die Beobachtung zeigt, daß dieser Zustand auch stabil ist, daß kleine zufällige Störungen des Systems also wieder abgebaut werden. Auch diese Tatsache läßt sich jetzt verstehen:

- **Stabilität der Sinkgeschwindigkeit:** Der stationäre Wert ergibt sich aus dem Gleichgewicht von Gewichtskraft und gesamter, am P.H. wirksamer Luftkraft  $\vec{F}_{L,ges} = \vec{F}_L + \vec{F}'_L$  welche nach oben gerichtet ist und mit  $v_s$  monoton wächst. Liegt  $v_s$  zufällig unter dem stationären Wert, so überwiegt die Gewichtskraft der Kraft  $\vec{F}_{L,ges}$  der P.H. wird beschleunigt und  $v_s$  erreicht wieder den stationären Wert. Ist umgekehrt  $v_s$  größer als der stationäre Wert, so überwiegt die Luftkraft  $\vec{F}_{L,ges}$  der Gewichtskraft, der P. R. wird abgebremst und  $v_s$  er-

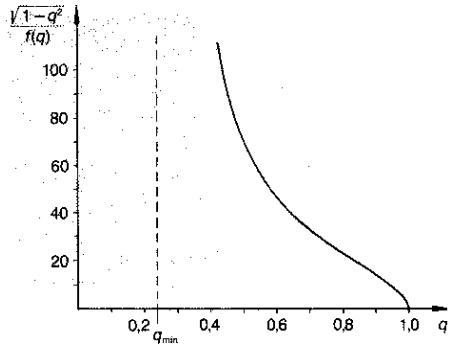
reicht ebenfalls wieder den Wert im stationären Zustand.

- **Stabilität der Drehfrequenz:** Das Anwachsen kleiner Drehfrequenzen wurde bereits diskutiert. Zu beschreiben bleiben Drehfrequenzen oberhalb des stationären Wertes. Für diese ist die Luftkraft im Sinne von Abb. 4) über den Vektor  $\bar{d}$  nach links „hinausgekippt“ so daß ein Drehmoment entsteht, was der Rotation entgegenwirkt und demzufolge wieder  $\omega$  reduziert.

- **Stabilität des Richtungswinkels:** Der stationäre Wert ergibt sich aus dem Gleichgewicht der Drehmomente aus Ungleichung (12). Seine Stabilität wurde bereits im vorherigen Abschnitt begründet.

## Abhängigkeit des stationären Zustands von Systemparametern

Aussagen über die Abhängigkeit des stationären Zustands von typischen Parametern des P.H. lassen sich erst nach einer quantitativen Formulierung der oben diskutierten drei Stationaritätsbedingungen machen, da diese simultan erfüllt sein müssen. Für die hiermit zusammenhängenden Überlegungen verweisen wir auf den Anhang und geben an dieser Stelle nur die Ergebnisse an:



**Abb. 6:** Graph der Funktion  $q \rightarrow \sqrt{1-q^2} \cdot \frac{1}{f(q)}$

- Die Stationarität der Sinkgeschwindigkeit  $v_s$  bedeutet, daß die Gleichung (A. 10) erfüllt sein muß:

$$F_G = a \cdot \rho l^2 q^2 \cdot v_s. \quad (13)$$

Dabei ist  $F_G$  die Gewichtskraft des P.H.,  $a$  eine Konstante  $\rho$  die Luftdichte,  $l$  die Flügellänge und  $q = \sin\alpha$ .

- Die Stationarität der Drehfrequenz  $\omega$  wird durch die Gleichung (A. 15)

$$v_s = \omega^2 l^2 \cdot \tilde{a}^2 \cdot f(q) \quad (14)$$

ausgedrückt. Hierbei ist  $\tilde{a}$  eine Konstante und  $f(q)$  nach Gleichung (A.16) eine von  $q = \sin\alpha$  abhängige Funktion mit der Flügellänge  $l$  als Parameter und nach Ungleichung (A. 17) oberhalb eines kleinsten  $q$ -Wertes  $q_{\min}$  definiert.

- Die Stationarität des Richtungswinkels  $\alpha$  schließlich wird durch die Gleichung (A. 20)

$$\omega^2 q^2 \sqrt{1-q^2} = 2 p \cdot \frac{F_G}{m_{Fl} \cdot l} \quad (15)$$

zum Ausdruck gebracht ( $p$  ist eine Konstante und  $m_{Fl}$  die Masse eines Flügels).

Um im folgenden exemplarisch den Einfluß von Gewichtskraft und Flügellänge auf den stationären Zustand des P.H. diskutieren zu können, setzen wir Gl. (14) in Gl. (13) ein und erhalten

$$F_G = a \tilde{a}^2 \cdot \rho l^4 \omega^2 q^2 f(q). \quad (16)$$

Benutzt man diesen Ausdruck für die Gleichung (15), so folgt

$$\sqrt{1-q^2} \cdot \frac{1}{f(q)} = 2 p a \tilde{a}^2 \cdot \frac{\rho l^5}{m_{Fl}} \quad (17)$$

Abb. 6 zeigt den qualitativen Verlauf der Funktion von der linken Seite von Gl.(17) im physikalisch bedeutsamen Parameterbereich  $q \geq q_{\min}$ .

Unter Einbeziehung dieses Graphen können wir jetzt die folgenden Aussagen aus den gewonnenen Gleichungen ableiten.

- a) Einfluß der Gewichtskraft (bei  $l = \text{konst.}$ ):

- $q$  und damit  $\alpha$  hängt nicht von der Gewichtskraft  $F_G$  des P.H. ab (Gl. (17)).

Dieses hat als weitere Konsequenzen:

- Je größer  $F_G$  wird, desto größer wird auch  $v_s$  (Gl.(13)).

- Je größer  $F_G$  wird, desto größer wird auch  $\omega$  (Gl.(16)).

- b) Einfluß der Flügellänge (bei  $F_G = \text{konst.}$ ):

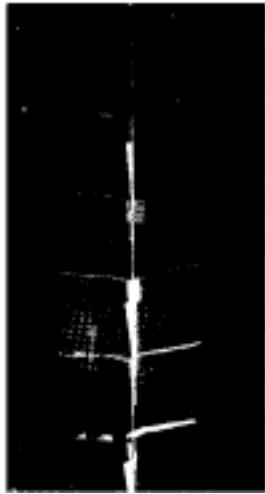
- Je größer  $l$  wird, desto größer wird  $\sqrt{1-q^2} \cdot \frac{1}{f(q)}$  (Gl.(17)) und desto kleiner also  $q$  und damit  $\alpha$  (s. Abb. 6). Allerdings ist diese Verringerung nur sehr klein.

- Je größer  $l$  wird, desto kleiner wird  $\omega$  (Gl.(15)).

- Je größer  $l$  wird, desto kleiner wird  $v_s$  (Gl. (13)).

Diese Aussagen lassen sich sämtlich durch einfache direkte Beobachtungen bestätigen. Diese Beobachtung läßt sich noch verfeinern, wenn man ein Stroboskop zur Verfügung hat und vom stationären Flug des jeweiligen P.H. stroboskopische Aufnahmen macht.

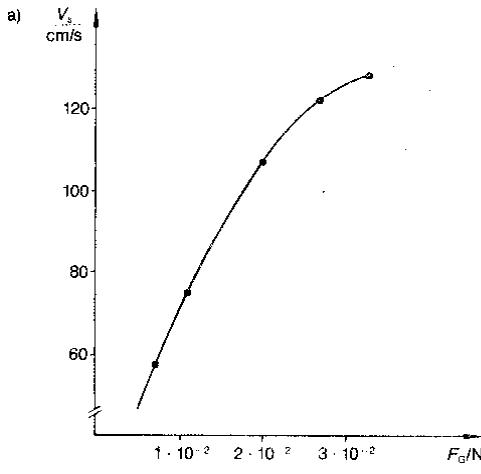
Abb. 7 zeigt exemplarisch eine solche Aufnahme, aus der sich bei Kenntnis der Blitzfrequenz  $v_s$  und  $\omega$  unmittelbar ergeben.  $\omega$  läßt sich am Stroboskop ablesen, wenn man dieses so einstellt, daß der P.H. nach genau 1 Umdrehung wieder beleuchtet



**Abb. 7:** Stroboskopische Aufnahme des rotierend zu Boden fallenden Papierbubschraubers

wird; und  $v_s$  ergibt sich aus der ablesbaren Fallstrecke auf dem Foto, wenn man die Abmessungen des P.H. zur Umrechnung des Maßstabs benutzt, und der Blitzfrequenz. Der Winkel  $\alpha$  läßt sich direkt auf dem Foto ausmessen.

Abb. 8 zeigt den registrierten Einfluß von  $F_G$  auf



**Abb. 8:** Gemessener Einfluß der Geschwindigkeit  $F_G$  auf **a)** die Sinkgeschwindigkeit  $v_s$  (Flügellänge  $l=9,3$  cm)

$v_s$  und auf  $\omega$ . Nach Gl. (13) sollte

$$v_s \sim \sqrt{F_G}$$

und nach Gl.(16) sollte

$$\omega \sim \sqrt{F_G}$$

sein.

Die Messungen kommen diesen Wurzelbeziehungen relativ nahe. Auf eine genauere Analyse sei hier jedoch verzichtet.

Abb. 9 zeigt den gemessenen Einfluß von  $l$  auf  $v_s$  und  $\omega$ . Für nahezu konstantes  $q$  und  $q$  nahe 1 wie man es auch beobachtet, ergibt sich theoretisch aus (13) die Proportionalität

$$v_s \sim \frac{1}{l}$$

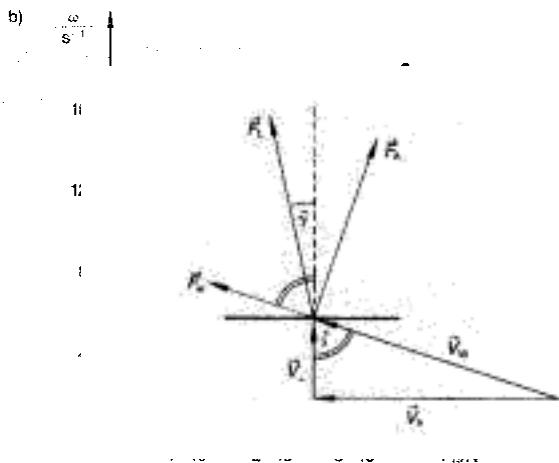
und aus (15) folgt

$$v_s \sim \frac{1}{\sqrt{l}}.$$

Damit liegt auch hier ein Ansatzpunkt vor, die Güte des zugrunde gelegten theoretischen Modells für das Realobjekt zu überprüfen.

## Der P.H. als Nichtgleichgewichtsstruktur

Der P.H. kann thermodynamisch als ein energie-durchflossenes System angesehen werden, welches im stationären Zustand hochwertige potentielle Energie in minderwertige Wärme umwandelt (zum Wert von Energie s. [7]). Diese fortlaufende



**Abb. 11:** Luftkräfte in der von  $v_{\perp}$  und  $v_h$  aufgespannten Ebene für die Flügelunterstützung der Rotationsfrequenz  $\omega$

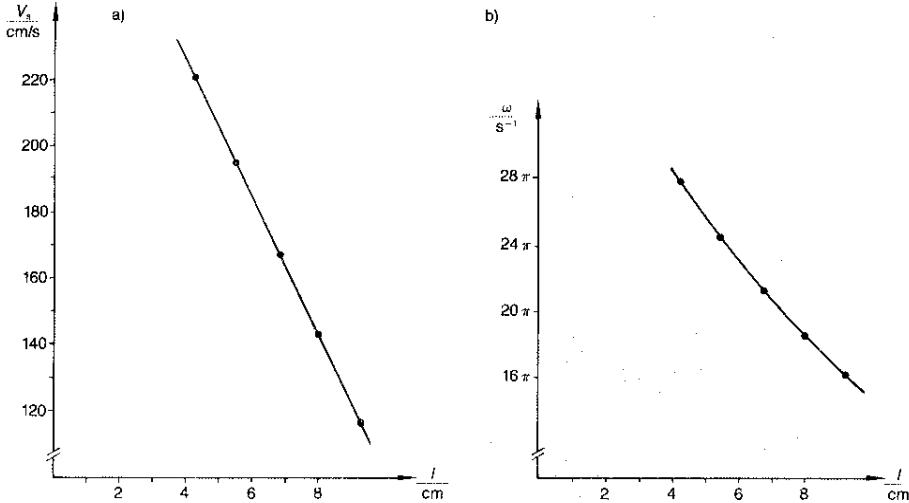


Abb. 9: Gemessener Einfluß der Flügellänge  $l$  auf a) die Sinkgeschwindigkeit  $v_s$ . b) die Rotationsfrequenz  $\omega$ . (Gewichtskraft  $F_G = 2,5 \cdot 10^{-2}$  N)

Energiedissipation ist quasi der „Motor“ für die Aufrechterhaltung der räumlichen (durch  $\alpha$  definierten) und zeitlich periodischen (durch  $\omega$  definierten) Struktur im stationären Zustand. Sie ist auch entscheidend an der Stabilisation der raumzeitlichen Struktur des P.H. beteiligt, welche durch einen Selbstregulationsmechanismus zu stande kommt. Diese Selbstregulation wird durch Rückkopplungen realisiert. So wirkt sich z.B. die Größe von  $\alpha$  auf die Größe der am Flügel angreifenden Drehmomente aus, welche wiederum die Größe von  $\alpha$  bestimmen: Während das mit der Luftkraft gekoppelte Moment mit zunehmendem Winkel  $\alpha$  wächst, fällt mit wachsendem  $\alpha$  das zentrifugale Moment (s. Abschnitt 4). Dieses unterschiedliche Wachstum der Momente ist Ausdruck der Nichtlinearität des Systems und notwendige Voraussetzung für die Existenz eines endlichen stationären Wertes für den Richtungswinkel.

Der P.H. besitzt damit Eigenschaften, wie sie auch an anderen einfachen mechanischen Systemen beobachtet werden können (s. [8], [9], [10]) und welche typisch sind für die sog. dissipativen Strukturen im Sinne Prigogine's.

Der P.H. kann u. E. als ein anschauliches Beispiel zur Einführung der Systembeschreibung dienen, welche bei der Erfassung der hiermit angesprochenen thermodynamischen Strukturen fernab vom Gleichgewicht erforderlich ist. Der Vorteil dieses Spielzeugs ist es, daß sein Verhalten ohne thermodynamische Kenntnisse beschrieben werden kann. Es war die Absicht der vorangegangenen Abschnitte eine solche Beschreibung sowohl auf Qualitativen als auch auf quantitativen Niveau vorzustellen.

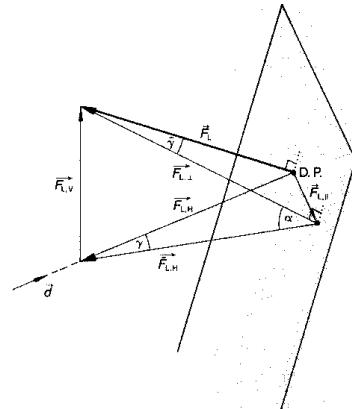


Abb. 10: Luftkraftkomponenten am Flügel im stationären Zustand (D.P. = Druckpunkt; L = rechter Winkel).

## Anhang: Quantitative Formulierung der Stationaritätshedingungen

Um diese Bedingungen formulieren zu können, benötigt man die expliziten Ausdrücke für bestimmte Komponenten der Luftkraft  $\vec{F}_L$ . Da wir uns an dieser Stelle auf den stationären Zustand beziehen, ist dieses jedoch relativ einfach.

Ausgangspunkt der Überlegungen ist die Tatsache, daß im stationären Zustand die Identität  $F_{L,ges} = F_G$  gilt, was für die Luftkraft  $\vec{F}_L$  am einzelnen Flügel bedeutet, daß ihre vertikale Komponente  $\vec{F}_{L,v}$  (s. Abb. 10) die halbe Gewichtskraft kompensieren muß:

$$F_{L,v} = \frac{1}{2} F_G \quad (\text{A.1})$$

Hieraus lassen sich mit Hilfe der angegebenen Winkel die übrigen relevanten Kraftkomponenten berechnen.

Der Abb. 10 entnimmt man für die senkrecht auf den Flügel stehende, in der Ebene E liegende Kraft  $F_{L,\perp}$  die Beziehung ( $q = \sin\alpha$ ):

$$F_{L,\perp} = \frac{F_{L,v}}{\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{2} F_G}{q} \quad (\text{A.2})$$

Für die horizontale, senkrecht zum Flügel stehende Kraftkomponente  $\bar{F}_{L,H}$  folgt entsprechend:

$$\bar{F}_{L,H} = F_{L,v} \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2} F_G \frac{\sqrt{1-q^2}}{q}. \quad (\text{A.3})$$

Hieraus ergibt sich  $F_{L,\parallel}$  zu:

$$F_{L,\parallel} = \tilde{F}_{L,H} \cdot \operatorname{tg}\gamma, \quad (\text{A.4})$$

was benötigt wird, um  $\tilde{\gamma}$  bzw.  $\operatorname{tg}\tilde{\gamma}$  angeben zu können:

$$\operatorname{tg}\tilde{\gamma} = \frac{F_{L,\parallel}}{F_{L,\perp}} = \sqrt{1-q^2} \cdot \operatorname{tg}\gamma \quad (\text{A.5})$$

Die Ausdrücke (A. 2), (A. 3) und (A. 5) werden im folgenden bei den Stationaritätsbedingungen benutzt.

## 1. Bedingung: $v_S = \text{konst.}$

Hierfür benötigt man einen Ausdruck für die Gesamtkraft  $\bar{F}_{L,ges}$  der sich durch eine energetische Betrachtung leicht gewinnen lässt (siehe z. B. auch [5]) Durch die wirksame Fläche

$$A = \pi r^2 = \pi p^2 l^2 q^2 \quad (\text{A.6})$$

des P.H. tritt ein Luftstrom, welcher von der Geschwindigkeit  $v$  auf  $v$  abgebremst wird. Damit verliert die Luft pro Zeiteinheit die Energie

$$\Delta \dot{W} = \frac{1}{2} \dot{m} v_s^2 - \frac{1}{2} \dot{m} v_e^2, \quad (\text{A.7})$$

wobei pro Zeiteinheit die Masse

$$\dot{m} = \rho v A$$

die durch die Fläche  $A$  hindurchtritt ( $\rho$  ist die Dichte der Luft).

Die abbremsende Kraft au den „Wind“ ist damit durch  $\Delta \dot{W} / v$  gegeben. Wodurch wegen „actio gleich reactio“ auch der Betrag der Luftkraft  $\bar{F}_{L,ges}$  festgelegt ist. Mit Gl.(A. 8) folgt also:

$$F_{L,ges} = \frac{\rho}{2} A \cdot (v_s^2 - v_e^2) \quad (\text{A.9})$$

Die Stationaritätsforderung

$$F_{L,ges} = F_G$$

schreibt sich damit unter Benutzung von (A. 6) und dem Geschwindigkeitsverhältnis  $k = v_e/v_s$ :

$$F_G = a \cdot \rho l^2 q^2 \cdot v_s^2,$$

wobei zur Abkürzung

$$a = \frac{\pi}{2} p^2 \cdot (1-k^2)$$

gesetzt wurde

## 2. Bedingung: $\omega = \text{konst.}$

In der oben beschriebenen Ebene E (s. Abb. 3) liegen im stationären Zustand geometrische Verhältnisse vor, wie sie durch Abb. 11 wiedergegeben werden (vgl. auch Abb. 6). Für das Kräfteverhältnis 8 nach Gl. (10) gilt dann:

$$\delta = \operatorname{tg}(\xi - \tilde{\gamma}) = \frac{\operatorname{tg}\xi - \operatorname{tg}\tilde{\gamma}}{1 + \operatorname{tg}\xi \cdot \operatorname{tg}\tilde{\gamma}}, \quad (\text{A.12})$$

wobei  $\operatorname{tg}\tilde{\gamma}$  durch (A.5) und  $\operatorname{tg}\xi$  wegen Gl. (6) durch

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{\omega r}{v_T} = \tilde{a} \cdot \frac{\omega l}{v_s} \quad (\text{A.13})$$

gegeben ist.

$$\tilde{a} = \frac{2p}{1+k} \quad (\text{A.14})$$

wurde hierbei wieder zur Abkürzung eingeführt. (A 12) lässt sich nach  $\operatorname{tg}\xi$  auflösen und führt mit den Ausdrücken (4), (A 5) und (A. 13) auf die Beziehung

$$v_s^2 = \omega^2 l^2 \cdot \tilde{a}^2 \cdot f(q) \quad (\text{A.14})$$

$f(q)$  steht dabei für den Term

$$f(q) = \left( \frac{q - \delta \frac{b}{2pl} \sqrt{1-q^2}}{\delta \cdot q + \frac{b}{2pl} \sqrt{1-q^2}} \right)^2 \quad (\text{A.16})$$

Hier ist wesentlich, daß wegen  $\omega \geq 0$ ,  $v_s \geq 0$  und

$$\tilde{a}l \cdot \frac{\omega}{v_s} = \operatorname{tg} \xi = f(q)^{-1/2}$$

nur die Werte von  $f(q)$  physikalische Bedeutung haben, für welche

$$q - \delta \frac{b}{2pl} \sqrt{1-q^2} \geq 0$$

ist, so daß stets

$$q \geq q_{\min} = \frac{\delta \cdot \frac{b}{2pl}}{1 + \delta^2 \cdot \frac{b^2}{4p^2 l^2}} \quad (\text{A.17})$$

sein muß.

Für sehr schmale Flügel ( $b \ll 1$ ) geht  $q_{\min}$  gegen Null. Für die für einen P.H. typischen Werte

$$\delta = 20, b/(2pl) = 1/10 \text{ ist } q_{\min} \approx 0,89$$

also relativ nahe bei 1.

### 3. Bedingung $\alpha = \text{konst.}$

Für den stationären Wert von  $\alpha$  ist

$$\tilde{F}_z \cdot \cos \alpha \cdot \frac{1}{2} = F_{L,\perp} \cdot pl. \quad (\text{A.18})$$

Der Abb. 5 entnimmt man, daß

$$\tilde{F}_z = F_z \cdot \frac{r'}{d'}. \quad (\text{A.19})$$

Mit dieser Beziehung, mit  $F_z$  nach Gl. (11).  $F_{L,\perp}$  nach Gl.(A.2) und  $r' = 1/2 \cdot q$  folgt aus (A. 18) die Gleichung

$$\omega^2 q^2 \sqrt{1-q^2} = 2p \frac{F_g}{m_{fl} \cdot l}. \quad (\text{A. 20})$$

### Literatur

[1] Norberg A.: Autorotation, self-stability, and structure of single-winged fruits and seeds (samaras) with comparative remarks on animal flight Biol, Rev, of die Cambr. Phil. Soc. 48(1973). S. 561-596

[2] Walker; J.: Die Aerodynamik von Flugfrüchten. Spektrum der Wissenschaft 12/1981, S, 124

[3] Mander; I, Dipple, G. und Gossage. H.: Paierfieger. Modelle zum selberfalten; München. dtv 1982 Taschenbuchausgabe)

[4] Prandtl L, Oswatitsch, K. und Wieghardt, K.. Strömungslehre Braunschweig, Vieweg 1969

[5] Molly J: Windenergie in Theorie und Praxis, Karlsruhe; Müller 1978

[6] Hertel, H.: Struktur-Form-Bewegung. Mainz: Krausskopf-Verlag 1963

[7] Schlichting H.J.: Energie und Energieentwertung Heidelberg:Quelle & Meyer 1983

[8] Rodewald, B. und Schlichting H.J.: Der pikkende Specht ein Spielzeug, das Reibung konstruktiv nutzt. In: Scharmann. A) Hofstaetter, A. und Kuhn, W (Hg.): DPG-Fachausschuß Didaktik der Physik: Vorträge der Frühjahrstagung 1983 Gießen. Gießen 1983, S 50.

[9] Rodewald, B und Schlichting, H.J.: Ein Spielzeug zur Veranschaulichung von Katastrophen in Ökosystemen, NiU P/Ch 32 (1984)

[10] Schlichting H.J. und Rodewald, B.: Physikalische Beobachtungen am Dampf-Jet-Boot. In: Kuhn, W.; DPG-Fachausschuß Didaktik der Physik. Vorträge der Frühjahrstagung 1984 Münster Gießen, 1984