

# Lichtkegel und Schattenhyperbeln

## Ein optisches Alltagsphänomen aus physikalischer Sicht

*Die Kerze leuchtet ihr warmes Licht.  
Sie lockt uns hinein in die Optik.*

MARTIN WAGENSCHNEIDER

**Wird das Licht von Kerzen und Lampen teilweise abgeschirmt, so entstehen charakteristische und oft formschöne Licht- und Schattenfiguren an der Wand. Zum einen soll auf dieses optische Alltagsphänomen aufmerksam gemacht werden. Zum anderen wird eine einfache physikalische Beschreibung und Auswertung skizziert.**

### 1 Einleitung

Um dazu beizutragen, die Physik aus dem Schattendasein einer trockenen akademischen Disziplin zu befreien, sollten Schüler angeleitet werden, physikalische Phänomene auch außerhalb des nur wenige Stunden umfassenden Physikunterrichts im Alltag zu entdecken und physikalisch zu verstehen. Wir haben dazu wiederholt Vorschläge gemacht (siehe z. B. [1] und [2]). Im Folgenden soll auf ein häufig anzutreffendes optisches Phänomen aufmerksam gemacht werden, das sowohl ästhetisch ansprechend als auch physikalisch einfach zugänglich ist. Es kann außerdem als ein Beispiel dafür angesehen werden, dass mathematische Figuren – im vorliegenden Fall Hyperbeln – nicht nur

in Mathematikbüchern oder im Hausheft der Schülerinnen und Schüler auftreten.

Dass sich Lichterscheinungen in vielen praktischen Fällen mit Hilfe elementarer Prinzipien der Geometrie beschreiben und erklären lassen, ist seit der durch Euklid begründeten geometrischen Optik bekannt. Die zunächst nicht auf der Hand liegende Modellvorstellung, wonach Licht auf gerade Strahlen zurückgeführt und Lichtquellen aus Lichtpunkten zusammengesetzt gedacht werden kann, erwies sich als äußerst erschließungsmächtig. Das folgende Beispiel zeigt einmal mehr, dass über einfache geometrische Figuren hinausgehend, auch Parabeln und andere Kegelschnitte zum Repertoire der geometrischen Optik gehören.

### 2 Ein Kunstwerk aus Licht und Schatten

Kerzen und Teelichter dienen heute hauptsächlich dazu, eine gemütliche Atmosphäre zu schaffen. Dazu werden sie oft aus Dekorationsgründen aber auch zum Schutze gegen bewegte Luft in ein Glas oder einen anderen Behälter gestellt. Stehen diese Leuchten in der Nähe einer Wand, so wird der Lichtschein an der Wand von einem wohlgeformten Schatten berandet, dessen schlichte Ästhetik nicht unerheblich zu dem ansprechenden Ambiente des Kerzenlichtes beiträgt (Abb. 1). Aber auch elektrische Leuchten, die wie in Abbildung 2 mit einem Lampenschirm versehen sind, zeichnen zuweilen interessante Licht- und Schattenstrukturen an die Wand.

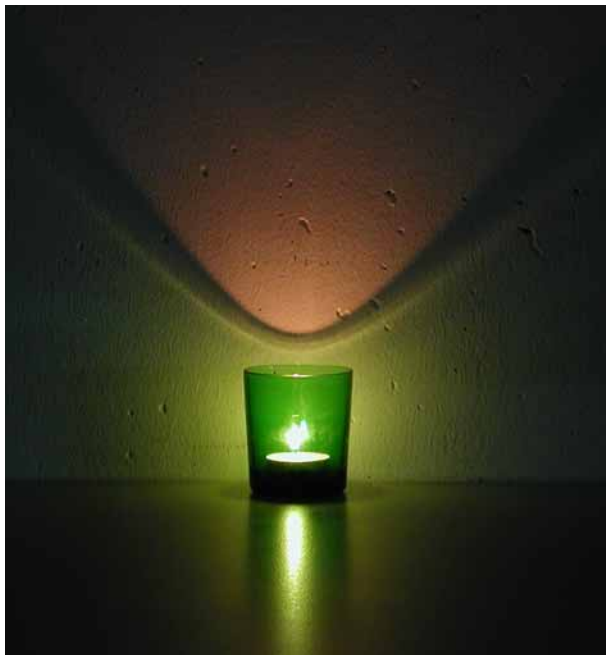


Abb. 1. Teelicht in einem Trinkglas



Abb. 2. Eine Tischleuchte mit Lampenschirm



Abb. 3. Ein höheres Glas produziert eine schlanke Hyperbel.

Wie kommt es zu diesem Phänomen? Welche Kurve trennt hier das Licht- vom Schattengebiet? Die Antwort ist verblüffend einfach, wenn man sich ganz im Geiste der geometrischen Optik vor Augen führt, dass die (der Einfachheit halber als Punktlichtquelle aufgefasste) Flamme der Kerze oder die Glühwendel der Lampe Lichtstrahlen radial in alle Richtungen sendet. Aus dieser Lichtkugel wird durch den kreisrunden Rand des Glases oder des Schirms gewissermaßen ein sich nach oben öffnender Lichtkegel herausgeschnitten, dessen Spitze in der Punktlichtquelle liegt. Lässt man den (rot eingezeichneten) Strahl in Abbildung 5 gedanklich am Rand des Glases entlanglaufen, so beschreibt er einen Kegelmantel.

Die senkrecht dazu orientierte Wand durchschneidet diesen Lichtkegel so, dass die Randkurve eine nach oben offene Figur darstellt, eine Hyperbel. Diese wird umso schlanker, je größer die Entfernung zwischen Lichtquelle und Rand des Glases ist, und erscheint umso höher an der Wand, je weiter die Leuchte von der Wand entfernt wird, wie man experimentell leicht nachvollziehen kann.

### 3 Zur Berechnung der Schattenhyperbel

Die analytisch beschreibbare Kurve der Hyperbel fordert geradezu zu einer quantitativen Betrachtung heraus. Denkt man sich ein Koordinatensystem mit dem Ursprung in der Punktlichtquelle, so bezeichnet  $r$  den Ra-



Abb. 4. Eine Struktur aus waagerechten Rinnen liefert ein ganzes Spektrum von Hyperbeln mit unterschiedlicher Öffnungsweite.

dus der Öffnung,  $h$  die Höhe des Randes über der Lichtquelle (Abb. 5) und  $d$  den Abstand der Wand vom Mittelpunkt der Öffnung aus gemessen.

Die Gleichung des kreisförmigen Lichtkegels lautet mit den in Abbildung 5 eingeführten Bezeichnungen:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} - \frac{z^2}{h^2} = 0$$

Daraus berechnet man für die nach oben geöffnete Hyperbel im Abstand  $y = d$  zur Kegellachse die Gleichung:

$$z = \frac{h}{r} \sqrt{x^2 + d^2}$$

Da sich für ein Trinkglas als Kerzenbehälter der Öffnungsradius  $r$ , die Höhe  $h$ , um die der Rand des Glases über (der Mitte) der Kerzenflamme liegt, und der Abstand  $d$  der Glasmitte zur Wand leicht ausmessen und variieren lassen, ergibt sich eine einfache Möglichkeit, die Projektionen der Hyperbel an der Wand(tafel) rechnerisch nachzuvollziehen (Abb. 6). Besonders für durchsichtige Gläser, bei denen der Rand des Glases eine leicht nachzuzeichnende Parabel entwirft (Abb. 3), kann man die (bei gleicher Kalibrierung) berechnete und auf Folie ausgedruckte Kurve auf die Wand legen und die Übereinstimmung leicht überprüfen. Es zeigt sich, dass die Dicke der an der Wand gezeichneten Hyperbel in etwa der Unschärfe entspricht, die durch die Abweichung der Lichtquelle von der Punktförmigkeit hervorgerufen wird.

Mit einem zur Zeit im Handel erhältlichen Trinkglas, das eine Struktur waagerechter Rillen aufweist, wird sogar eine ganze Hyperbelschar auf die Wand projiziert einschließlich einiger nach unten geöffneter Hyperbeln, wie andeutungsweise in Abbildung 4 zu erkennen ist. Stellt man das Teelicht etwas höher, so

lassen sich die nach unten geöffneten Hyperbeln noch eindrucksvoller hervorgerufen. Allerdings ist im vorliegenden Fall wegen der Verjüngung des Glases nach unten der zu der jeweiligen Hyperbel gehörende Rillenradius  $r$  in Rechnung zu stellen.

#### 4 Weitere Lichtkegelschnitte an der beleuchteten Wand

Die hier beschriebene Hyperbel ist nicht der einzige Typ der zu beobachtenden Kegelschnitte. Nachdem die Halogenstrahler, die oft mit einem Reflektor ausgestattet sind, größere Verbreitung gefunden haben, beobachtet man immer häufiger, dass der an die Wand geworfene Lichtschein einen elliptisch oder parabolisch geformten Rand aufweist. Wenn die Strahler schräge zur Wand gerichtet sind, hängt es vom Winkel ab, ob die Wand den Lichtkegel vollständig durchschneidet und eine geschlossene Kurve, also eine Ellipse, abbildet oder ob eine offene Kurve, also eine Hyperbel oder eine Parabel entsteht.

Experimente mit derartigen Strahlern vor einer festen Wand aber auch eine Kerze im Glas, vor die man eine bewegliche Projektionswand in unterschiedlichen Winkeln aufstellt, sind einfach durchzuführen. Die für eine rechnerische Behandlung nötigen Größen sind dabei ebenfalls leicht auszumessen.

#### 5 Optische Nebeneffekte

Bei der Durchführung der Experimente wird man auf weitere optische Effekte aufmerksam, die nicht unmittelbar mit dem oben beschriebenen Phänomen zu tun haben. Zunächst zeigt sich, dass durchsichtige Gläser im Unterschied zu undurchsichtigen Schirmen keine bloße Grenze zwischen Licht und Schattengebiet hervorgerufen, sondern gleichsam in »Schattenschrift« gemalte Hyperbeln.

Wegen der weitgehenden Transparenz der Gläser findet eine sehr deutliche Beeinflussung des Lichtverlaufs nur an der oberen Kante oder im Falle des mit

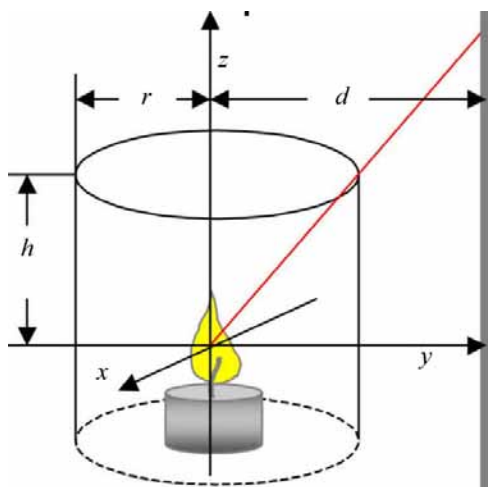


Abb. 5. Schema zur quantitativen Beschreibung des Phänomens

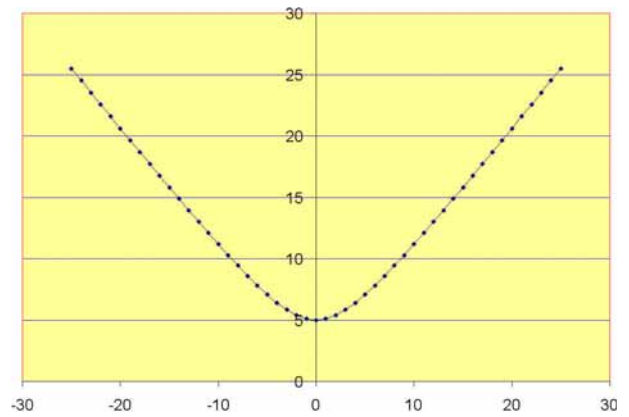


Abb. 6. Berechnete Schattenkurve für  $h = 3$  cm,  $r = 3$  cm,  $d = 5$  cm. (Die Einheit der Achsenbeschriftungen ist cm)

Rillen versehenen Glases an den Rillen statt. An der oberen Kante kommt es durch Lichtbrechung in einem engen Bereich zu divergenten und konvergenten Lichtbündeln, die eine deutliche Intensitätsverminderung und Intensitätszunahme hervorrufen, die sich als schmale Schatten- und Lichtkurve an der Wand abzeichnen. Letzteres ist in Abbildung 1 sehr deutlich zu erkennen. Bei den Rillen des in Abbildung 4 dargestellten Glases alternieren ebenfalls Lichtdivergenz mit -konvergenz, so dass ein Wechsel von dunklen und hellen Kurven entsteht.

Ein weiterer ins Auge fallender farbiger Lichteffect ist in Abbildung 1 zu erkennen. Um den abgeschirmten Bereich zumindest in der Lichtintensität zu vermindern, verwendeten wir ein dunkelgrün eingefärbtes Glas und waren zunächst sehr verwundert, einen rötlich gefärbten Lichtkegel vorzufinden. Woher kommt die Farbe, die an sich überhaupt nicht vorhanden ist? Bei diesem Phänomen handelt es sich um den schon von Goethe beschriebenen so genannten Simultankontrast. Dabei geht es anschaulich gesprochen um das Phänomen, dass wir das grüne Licht auf der weißen Wand als weniger grün wahrnehmen, als es ist. Wenn aber auf diese Weise Grün aus dem Spektrum des weißen Lichtes »abgezogen« wird, dominiert die Komplementärfarbe und es entsteht ein rötlicher Farbton an der Stelle, die vom (nahezu) weißen Licht der Kerze getroffen wird.

Ich danke Herrn CARSTEN BRUNS für die Hilfe bei Anfertigung der Fotografien.

#### Literatur

- [1] H. J. SCHLICHTING: Sonnentaler fallen nicht vom Himmel. – MNU 48 (1995) Nr. 4, 199–207.
- [2] H. J. SCHLICHTING: Das Schwert der Sonne – Alltägliche Reflexionen im Lichte eines einfachen optischen Phänomens. – MNU 51 (1998) Nr. 7, 387–397 und MNU 52 (1999) Nr. 6, 330–336.

H. JOACHIM SCHLICHTING, Universität Münster, Institut für Didaktik der Physik, Wilhelm-Klemm-Str. 10, 48149 Münster, [schlichting@uni-muenster.de](mailto:schlichting@uni-muenster.de), ist Professor für Didaktik der Physik. Die physikalische und fachdidaktische Erschließung von Alltags- und Naturphänomenen zählt zu einem seiner Arbeitsgebiete.