

Der kürzeste Weg ist nicht immer der schnellste

H. Joachim Schlichting

*Die Sinne trügen nicht
aber das Urteil trügt*

Goethe

Schiefe und gekrümmte Kugelbahnen

Diese Aussage erscheint trivial und durch zahlreiche Erfahrungen bestätigt. Gilt sie aber auch in der folgenden Situation? Ein höher gelegener Punkt S wird jeweils durch eine gerade und eine nach unten gekrümmte Bahn mit einem tiefer gelegenen Punkt Z verbunden (Abb. 1). Zwei Kugeln werden zur gleichen Zeit bei S losgelassen,

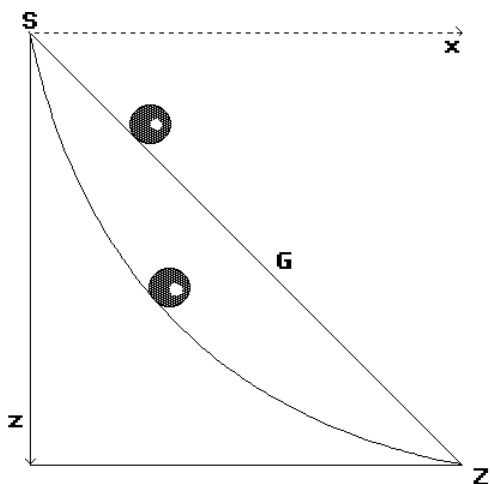


Abb. 1: Die Kugel auf der gekrümmten auf der falschen Unterstellung, derselbe Bahn P erreicht Z früher als die auf der energetische Aufwand könne auch nur zu geraden Bahn G, obwohl diese kürzer ist.

und es fragt sich, welche von beiden zuerst durchs Ziel geht.

Unserer Erfahrung nach werden sowohl von Laien als auch von Fachleuten häufig falsche Voraussagen gemacht, vor allem Aussagen der folgenden Art:

- Die Kugeln haben beim Start S dieselbe potentielle Energie und im Ziel Z dieselbe kinetische Energie also auch dieselbe Endgeschwindigkeit. Folglich sind sie gleich schnell.

- Auf beide Kugeln wirkt dieselbe Kraft und Beschleunigung. Deshalb muß die Kugel auf der kürzeren Bahn schneller am Ziel sein. Selbst eine mit einfachsten Mitteln (siehe unten) durchgeführte Demonstration zeigt indessen eindeutig, daß die Kugel auf der längeren gekrümmten Bahn die schnellere ist und daher zuerst durchs Ziel geht.

Die Fehleinschätzungen beruhen einerseits auf der falschen Unerstellung, derselbe energetische Aufwand könne auch nur zu derselben "Leistung" führen, sowie andererseits auf der mangelnden Vertrautheit mit einer veränderlich wirkenden Schwerkraft und entsprechend ungleichmäßigen Beschleunigungen.

Die Tatsache, daß beide Kugeln dieselbe Endgeschwindigkeit erreichen, sagt nichts darüber aus, auf welche Weise sie sie erreichen. Das ist aber entscheidend für die Durchschnittsgeschwindigkeit und damit für die Zeit zur Durchquerung der Strecke SZ. Dadurch daß auf die Kugel der gekrümmten Bahn P zunächst eine sehr große Kraft wirkt, die zum Ziel hin abnimmt, wird die Kugel gleich zu Beginn aufgrund einer großen Beschleunigung auf eine relativ hohe Geschwindigkeit gebracht, um sich dann mit abnehmender Beschleunigung der Endgeschwindigkeit zu nähern. Die Kugel auf der schiefen Bahn G unterliegt demgegenüber einer konstanten Kraft. Sie wird daher während des gesamten Weges gleichmäßig auf die Endgeschwindigkeit beschleunigt. Da im Falle der gekrümmten Bahn die Kugel länger mit einer hohen Geschwindigkeit rollt als im Falle der schiefen Bahn, besitzt sie eine höhere Durchschnittsgeschwindigkeit und ist daher schneller am Ziel. Offenbar reicht auch die Tatsache, daß die schiefe Bahn die kürzeste Verbindung zwischen S und Z ist, nicht aus, den Vorsprung der schnellen Kugel P wieder auszugleichen.

(Der Einfluß der Reibung kann wie bei fast allen ähnlichen Rollversuchen vernachlässigt werden. Auch der Einfluß der Drehung der Kugeln ändert normalerweise nichts am qualitativen Verhalten der Kugeln).

Einfache quantitative Abschätzungen

Diesen Sachverhalt kann man natürlich auch quantitativ belegen, obwohl dadurch keine neuen Argumente ins Spiel gebracht werden. Dazu empfiehlt es sich, der Einfachheit halber die gekrümmte Bahn als parabelförmig anzusehen. Auf einer Parabelbahn ist die Bewegung nämlich harmonisch und daher die Zeit, die die Kugel zum Durchrollen benötigt, näherungsweise gleich 1/4 der Schwingungsdauer der entsprechenden harmonischen Schwingung:

$$T_p = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{h}{g}}$$

Die Durchlaufzeit auf der schiefen Bahn ergibt sich demgegenüber aufgrund der gleichmäßigen Beschleunigung aus $s = 1/2a \cdot T^2$. Geht man der Einfachheit halber von einem Steigungswinkel von 45° aus, so erhält man für $s = \sqrt{2h}$ und für $a = 1/\sqrt{2}g$. Daraus folgt $T_s = 2\sqrt{h/g}$.

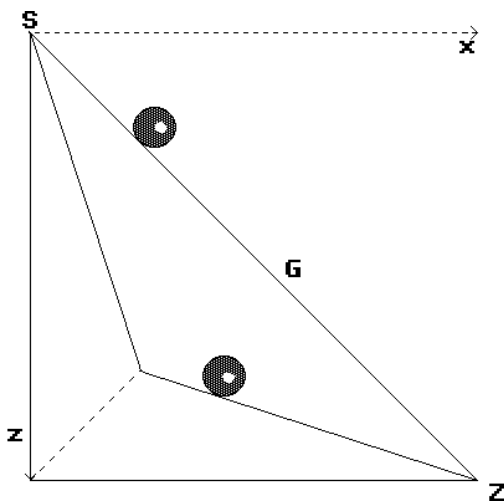


Abb. 2: Einfachste Realisation einer und damit gekrümmten Bahn durch zwei schiefe Teilstücke.

Da $2 > \pi/2$, ergibt sich unmittelbar $T_p > T_s$. Wenn die harmonische Bewegung in der Schule noch nicht behandelt wurde, genügt es, die gekrümmte Bahn aus zwei geraden Stücken zusammengesetzt zu betrachten und die für beide Teilstücke berechnete Gesamtzeit T_{12} und T_s zu vergleichen. Für den in Abb. 2 dargestellten Fall ergibt sich $T_1 = 1/\sqrt{3} \cdot \sqrt{h/g}$ und $T_2 = 2/\sqrt{3} \cdot \sqrt{h/g}$ und damit für $T_{12} = T_1 + T_2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{h/g}$. Da $\sqrt{3} < 2$ gilt auch hier $T_{12} < T_s$.

Die Brachistochrone

Das sind bereits zwei verschiedene Bahnen, die "schneller" sind als die kürzeste. Man kann sich leicht überlegen bzw. ausprobieren, daß es noch viele weitere mehr oder weniger "schnellere" gibt. Bleibt die Frage, welches die "schnellste", die sogenannte Brachistochrone ist. Das auszuprobieren, etwa durch systematische Variation der Bahnen, ist natürlich etwas mühselig. Johann Bernoulli hat bereits vor etwa 200 Jahren eine Methode erdacht, solche Bahnvariationen theoretisch durchzuführen und wurde dabei nicht nur auf die sogenannte Zyklode als "schnellste" Verbindung zwischen zwei Punkten S und Z geführt, sondern nebenbei auch noch auf die Variationsrechnung, ohne die die theoretische Mechanik, wie sie heute noch gelehrt wird, nicht zu denken ist. Die Zyklode ist übrigens jene Kurve, die (beispielsweise) das Reifenventil eines fahrenden Autos beschreibt.

Zeichnung der Brachistochrone

Dieser Sachverhalt gibt uns die Möglichkeit, die Zyklode für unser Kugelproblem zeichnerisch zu finden. Dazu nehme man eine Rolle (z.B. zylinderförmige Dose), befestige an dessen Wandung einen Stift, der etwas über den Boden hinausragt und rolle sie auf einem Blatt Papier oder auf der Wandtafel ohne Schlupf ab. Der Stift zeichnet dann die Zyklode. Am einfachsten ist es, wenn man die Rolle entlang eines auf der Unterlage fixierten Lineals führt. Läßt man die Rolle auf der Unterseite des Lineals abrollen (Abb.3) und wählt außerdem einen passenden Rollendurchmesser, dann kann man sogar die Brachistochrone des obigen Problems erhalten.

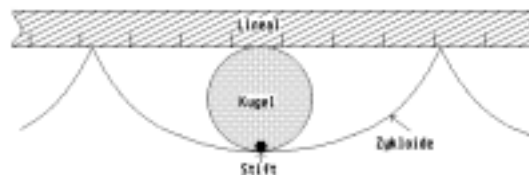


Abb. 3: Zur Konstruktion der Zyklode mit Hilfe eines am Umfang einer Rolle befestigten Stiftes (siehe Text).

Etwas Theorie

Natürlich kann man auch allgemein zeigen, daß unter den obigen Voraussetzungen die Brachisto-

chone die zeitlich "kürzeste" Verbindung zwischen zwei Punkten ist: Dazu legen wir den Ursprung in den Startpunkt S und den Energienullpunkt in den Zielpunkt Z. Die Geschwindigkeit entlang einer beliebigen Bahnkurve zwischen S und Z sei $v = ds/dt$. Dann beträgt die Zeit dt die die (als Massenpunkt betrachtete) Kugel zum Durchrollen der gesamten Kurve benötigt

$$T = \int_S^Z ds/v.$$

Einen expliziten Ausdruck für die Geschwindigkeit gewinnt man aus dem Energiesatz, demzufolge in der von S aus gemessenen Höhe z gilt:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgz; \text{ also } v = \sqrt{2gz}.$$

Da in der Ebene $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$ gilt, lautet das obige Integral

$$T = \int \frac{\sqrt{1 + \dot{z}^2}}{\sqrt{2gz}} dx, \text{ wobei } \dot{z} = \frac{dz}{dx}.$$

Das Brachistochrone Problem besteht nun darin, für dieses Integral das Minimum zu finden. Eine notwendige Bedingung dafür ist, daß der Integrand F die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dz} \right) - \frac{dF}{dz} = 0 = 0$$

erfüllt. Die daraus gewonnene Differentialgleichung

$$1 + \dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 0$$

wird gelöst durch die Parametergleichungen $x=a(\Phi - \sin \Phi)$ und $z=a(1 - \cos \Phi)$, wobei a eine Konstante ist. Wählt man a so, daß die durch x und z gegebene Kurve durch Z geht, so hat man die oben beschriebene "schnellste" Mulde, die Zykloide. Das hier skizzierte Auffinden des "zeitlich" kürzesten Weges erinnert an das Prinzip der kleinsten Wirkung, an das Fermatsche Prinzip in der geometrischen Optik, wonach eine Lichtstrahl zwischen zwei Punkten stets den "zeitlich" kürzesten Weg einschlägt.

Kugelbahn mit Mulde

Nach der Diskussion des Brachistochronenproblems bietet es sich an, mit einer weiteren Demonstration zu überprüfen, inwieweit die Botschaft, daß der kürzeste Weg sogar physikalisch gesehen nicht immer der "schnellste" ist, auch tatsächlich übergekommen ist. Dazu betrachte man eine leicht geneigte gerade Bahn und eine gleich

lange in der gleichen Weise geneigte Bahn, die allerdings mit einem muldenförmigen Umweg versehen ist (Abb. 4). Die Situation ist etwas anders als oben. Die Bahnen sind fast parallel.

Die Neigung ist lediglich dafür da, die Reibung der Kugeln aufzuheben. Die Frage bleibt dieselbe: Welche der beiden gleichzeitig bei S gestarteten Kugeln geht als erste durchs Ziel Z? Daß es auch in diesem Fall die mit dem längeren Weg ist, wird

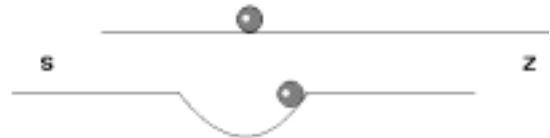


Abb. 4: Die Kugel auf der Bahn mit Mulde erreicht als erste das Ziel Z.

nach meiner Erfahrung häufig auch dann nicht prognostiziert, wenn vorher das Brachistochronenproblem diskutiert wurde. Der Anschauungsfehler ist ähnlich wie vorher. Man glaubt, daß der beim Hinabrollen in die Mulde gewonnene Vorsprung beim Hinaufrollen wieder verlorengelht. Zwar wird in der Tat der Geschwindigkeit auf den Wert zurück, den die Kugel vor der Mulde besaß. Sie fällt aber nicht unter diesen Wert, weshalb der in der Phase der höheren Geschwindigkeit gewonnene Vorsprung nicht wieder eingebüßt wird. Man kann das Problem natürlich auch in Anlehnung an das obige Beispiel behandeln, indem man Start und Ziel auf die Muldenränder zusammenzieht und die Mulde wie zwei aneinandergesetzte gekrümmte Bahnen behandelt. In der "schnellsten" Mulde erkennt man dann wieder eine Zykloide.

Zur Herstellung der Kugelbahnen

Wir haben alle Bahnen aus einem Aluminium U-Profil hergestellt. Da Aluminium relativ weich ist, lassen sich die gekrümmten Bahnen daraus leicht - z.B. übers Knie- biegen. Es gibt allerdings eine Vielzahl alternativer Möglichkeiten. Erwähnt sei hier nur die Benutzung von Schläuchen. In diesem Fall sind die Bahnen jedoch nicht selbsttragend, und man muß zusätzlich Vorrichtungen für eine geeignete Fixierung herstellen. Während durchsichtige Schläuche zu einer ähnlichen Wirkung wie bei den offenen Profilen führt, läßt sich bei undurchsichtigen Schläuchen zusätzlich eine Art Black-Box Effekt erzielen. Bei Schläuchen muß man jedoch darauf achten, daß der Querschnitt

genügend größer ist als der der Kugeln, weil das Problem ansonsten überlagert wird durch einen nicht mehr zu vernachlässigenden Einfluß des Luftwiderstandes. Es sei denn, dies ist aufgrund weitergehender Problemstellungen ausdrücklich gewünscht.

Wir haben hier bewußt abgesehen vom Einfluß der Rotationseffekte. Unsere Argumentation bezog sich im Grunde auf die Situation einer gleitenden Kugel. Auch dies ließe sich experimentell dadurch realisieren, daß man Perlen auf entsprechend geformten Drähten (z.B. Schweißdraht) rutschen ließe. Allerdings tritt in diesen Fällen die im Vergleich zur Rollreibung stärker ins Gewicht fallende Gleitreibung störend hinzu.

Kurzfassung

Mit einfachen Mitteln wird demonstriert und begründet, daß eine Kugel auf einer längeren Bahn, auf der sie unter dem Einfluß der Schwere hinunterrollt, schneller sein kann, als auf einer kürzeren.