Spielwiese

Die kreiselnde Büroklammer

CHRISTIAN UCKE | H. JOACHIM SCHLICHTING

Büroklammern sind allgegenwärtig. Sie taugen aber nicht nur dazu, Ordnung im Papierstapel zu schaffen, sondern lassen sich auch für verblüffende physikalische Experimente einsetzen. So geben sie einfache Kreisel ab und veranschaulichen die Formen von Ketten und Hängebrücken.

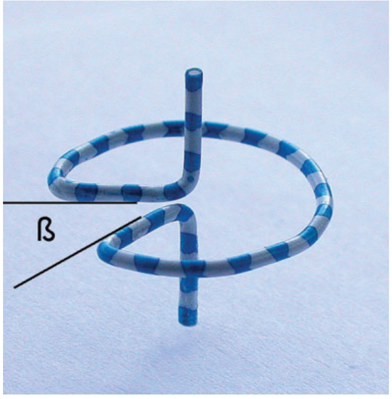


Abb. 1 ***Ein Kreisel, der sich aus einer Büroklammer biegen lässt.***

Abb. 2 ***Ein Stehaufkreisel aus einer größeren Büroklammer.***

Dem Norweger Johan Vaaler wird die Erfindung der Büroklammer zugeschrieben. Doch patentieren ließ er sie 1899 in Deutschland, weil es in Norwegen kein Patentamt gab. 1999 erschien eine Briefmarke zum Gedächtnis dieser epochalen Erfindung. Vaaler vermarktete seine Erfindung nicht. Das geschah kurze Zeit später in den Vereinigten Staaten. Dort beruft man sich auf ein noch früheres USA-Patent. Mittlerweile gibt es eine Vielzahl unterschiedlicher Formen von Büroklammern, Milliarden werden jährlich verbraucht.

Kreisel aus Büroklammern

Wie kann man aus einer Büroklammer in einem Stück in möglichst einfacher Weise einen Kreisel herstellen? Takao Sakai aus Japan hat einige interessante Möglichkeiten beschrieben [1]. Man biege den Draht der Büroklammer auf einem Kreis um eine Achse, so dass der Schwerpunkt des Kreisels in der Kreiselachse liegt, die wiederum aus zwei Halbachsen besteht (Abbildung 1). Dazu muss der Winkel β zwischen den Speichen gerade eine Größe von 53,13° haben. Diesen Winkel zu berechnen ist eine schöne Aufgabe für Physikstudenten im ersten Jahr ihres Studiums (siehe „Der Schwerpunkt des Kreisels“, S. 34).

INTERNET

Video eines Kreisels
www1.physik.tu-muenchen.de/~cucke/ftp/lectures/sakaigir.htm

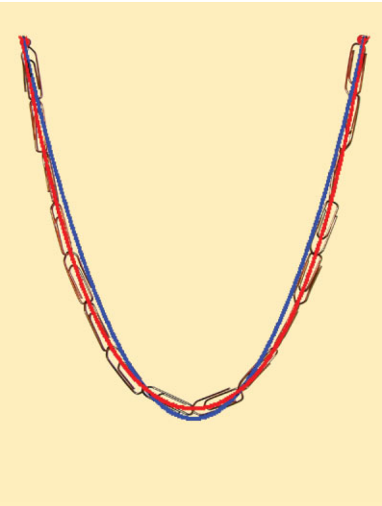
Programme
www.interactivephysics.com/
www.ipn.uni-kiel.de/persons/michael/xyzet/

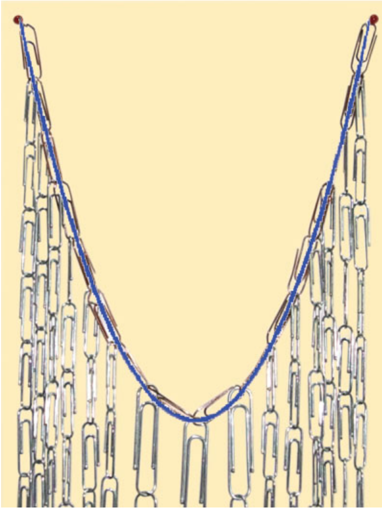
Bei der Realisation bediene man sich einer Büroklammer aus möglichst weichem Draht. Diese lässt sich sogar ohne Zange verformen. Auf die genaue Einhaltung des Winkels und der Kreisform kommt es nicht an. Wesentlich ist nur, dass der Schwerpunkt in der Achse liegt. Übrigens lassen sich noch viele weitere Kreiselformen realisieren [2].

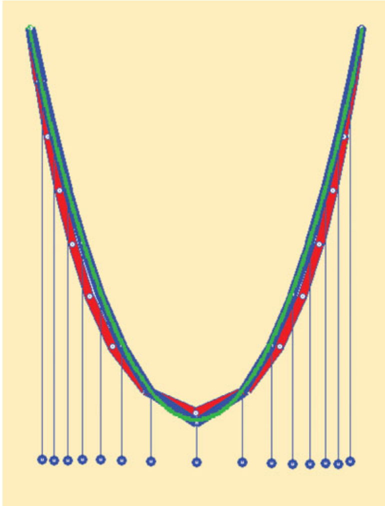
Ungewöhnlich einfach ist die Konstruktion eines Stehaufkreisels aus einer Büroklammer (Abbildung 2), die wir nur bei Yoshio Kamishina gesehen haben [3]. Wie aus der Abbildung ersichtlich, fällt der Schwerpunkt des Kreisels nicht mit dem Mittelpunkt des äußeren Kreises zusammen. Das ist ein charakteristisches Konstruktionsmerkmal des klassischen Stehauf- oder Wendekreisels, der normalerweise aus einem Kugelteil mit Stift besteht. Das Andrehen dieses Stehaufkreisels ist etwas mühsam, da man ihn außen am Kreisrand anfassen muss und deswegen keine sehr hohe Drehzahl erreicht. Der Effekt ist jedoch deutlich sichtbar. Etwas besser geht es, wenn man mit den Zeigefingern (jeweils in entgegengesetzte Richtung) gegen die gegenüberliegenden Seiten des Kreisels stößt. Aber das muss man etwas üben. (Ein kurzes Video finden Sie auf **www.phiuz.de** unter „Zusatzmaterialien zum Heft.“)

Für das Verhalten des Stehaufkreisels gibt es leider keine einfache Erklärung, die sich mit wenigen Sätzen formulieren lässt. Seit fast hundert Jahren bemühen sich Physiker in diversen Veröffentlichungen um eine zutreffende Beschreibung. Dabei lassen sich nur wenige anschauliche Aspekte aus den oft komplexen mathematischen Ausdrücken herausholen. Als anspruchsvolle Übungsaufgabe

DOI:10.1002/piuz.200501059







<<< Abb. 3 ***Kettenlinie mit 16 Büroklammern.***

<< Abb. 4 ***Parabel mit 16 Büroklammern und Gewichten. Eine ideale Parabel (blau) wurde darüber gelegt.***

< Abb. 5 ***Simulation von Kettenlinie und Parabel mit Interactive Physics.***

DER SCHWERPUNKT DES KREISELS

Den optimalen Winkel zwischen den Speichen des Kreisels ermittelt man wie folgt. Wird der Winkel zwischen den Speichen zu groß oder zu klein, liegt der Gesamtschwerpunkt neben dem Kreismittelpunkt. Zur Ermittlung des korrekten Winkels kann man sich auf die Berechnung des Schwerpunkts der beiden Speichen und des gegenüberliegenden, kleinen Kreisbogens der Länge s beschränken. Die anderen Teile des Kreisbogens (rot markiert) sind symmetrisch zum Kreismittelpunkt und brauchen deshalb nicht berücksichtigt zu werden. Es ist für die Berechnung günstig, den halben Speichenwinkel α einzuführen.

In der rechten Abbildung sind Speichen und Kreisbogen herausgehoben. Der Kreismittelpunkt sei der Nullpunkt des Koordinatensystems. Der Abstand des Schwerpunkts des Kreisbogens vom Nullpunkt betrage x_1. Ist s die Länge des Kreisbogens, berechnet sich wegen der Symmetrie zur x-Achse der Schwerpunkt mit dem Linienintegral

$$x_1 = \frac{\int x\,ds}{s} = \frac{1}{s}\int_{-\alpha}^{\alpha} r\cdot\cos\varphi\cdot r\cdot d\varphi = \frac{2\cdot r^2}{s}\sin\alpha.$$

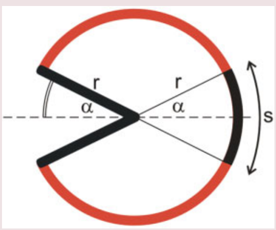
Sind ρ die Dichte des Drahtmaterials und A der Querschnitt des Drahtes, dann ist die Masse des Kreisbogens $m_1 = s\cdot\rho\cdot A$. Bezüglich des Nullpunktes erzeugt der Kreisbogen ein Moment

$$M_1 = m_1\cdot x_1 = 2\cdot r^2\cdot\sin\alpha\cdot\rho\cdot A.$$

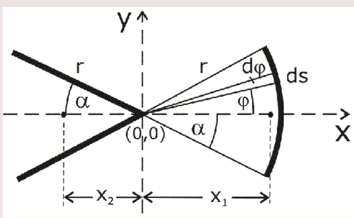
Der Schwerpunkt der Speichen liegt bei $x_2 = r/2\cdot\cos\alpha$, die Masse beträgt $m_2 = 2\cdot r\cdot\rho\cdot A$. Das von den Speichen erzeugte Moment bezüglich des Nullpunktes ist

$$M_2 = m_2\cdot x_2 = r^2\cdot\cos\alpha\cdot\rho\cdot A.$$

Aus dem Gleichsetzen beider Momente ergibt sich $\tan\alpha = 0{,}5$, das heißt $\alpha = 26{,}565°$. Der Winkel zwischen den Speichen ist dann $\beta = 2\alpha = 53{,}13°$.



Der Büroklammerkreisel in der Aufsicht.



Zur Berechnung des Schwerpunktes werden nur noch die Speichen und der gegenüberliegende Kreisbogen betrachtet.

für fortgeschrittene Physikstudierende ist der Stehaufkreisel in [4] abgehandelt.

Ketten aus Büroklammern

Welche Kurvenform nimmt eine Kette (ein flexibles Kabel oder ein Seil) an, wenn man sie an beiden Enden aufhängt? Diese Frage stellte sich schon Galileo Galilei – und beantwortete sie falsch, indem er auf eine Parabel tippte. Erst gegen Ende des 17. Jahrhunderts leiteten die Brüder Jacob und Johann Bernoulli sowie Gottfried Wilhelm Leibniz die richtige Form ab. Es handelt sich um die Funktion cosinus hyperbolicus (cosh), die auch als Summe zweier Exponentialfunktionen ausgedrückt werden kann. Die Ableitung der Kettenlinie findet sich in vielen Lehrbüchern der Mathematik oder Mechanik und wird deshalb hier nicht wiedergegeben.

Mit einigen Büroklammern lässt sich die Kettenlinie gut realisieren. Bei wenigen Büroklammern spielt die Länge und die Verbindung zwischen den Klammern noch eine Rolle. Je mehr man verwendet, umso besser ist die Annäherung an die ideale Kurve. In Abbildung 3 sind die ideale Kettenlinie und eine Parabel gleicher Länge über eine Kette mit 16 Büroklammern gelegt. Deutlich erkennbar stimmt die rote Kettenlinie mit der Büroklammerkette überein, die blaue Parabel hingegen nicht. Der Unterschied zwischen Kettenlinie und Parabel ist besonders markant bei einem relativ starken Durchhang wie in Abbildung 4.

Hängt an jedem Glied einer Kette ein im Verhältnis zur Masse eines Kettenglieds sehr große Masse, wie es beispielsweise bei Hängebrücken der Fall ist, verändert sich die Kettenlinie tatsächlich in eine Parabel (siehe „Die Hängebrückenparabel“). Auch das lässt sich mit Büroklammern realisieren. In Abbildung 4 ist dieselbe Kette aus Büroklammern wie in Abbildung 3 mit Massestücken versehen, wozu sich Büroklammern ebenfalls gut eignen. Es wurden genügend lange Ketten von Büroklammen genommen, deren Masse um mindestens den Faktor 20 größer war als die Masse einer Büroklammer in der Kette von 0,37 g. Die Zahl der Büroklammern (also die Größe der Masse) muss in einem bestimmten Verhältnis zur Steigung des betreffenden Abschnitts der Kettenlinie stehen. Je näher ein Kettenglied am Aufhängepunkt liegt, umso weniger darunter hängendes Gewicht (beispielsweise von der Straße) muss es tragen.

Zu erkennen ist in diesem Fall die Übereinstimmung mit der Parabel (blau). Durch die an den unteren Kettengliedern hängenden relativ großen Gewichte wird die Kurve gegenüber der Kettenlinie am unteren Punkt weiter nach unten gezogen.

Mit Physik-Simulationsprogrammen wie Interactive Physics oder XYZet (siehe „Internet", S. 33) lassen sich die beschriebenen Sachverhalte ebenfalls sehr schön veranschaulichen. Ein Simulationsprogramm, das im Rahmen von XYZet läuft, finden Sie auf www.phiuz.de unter „Zusatzmaterialien zum Heft". In Abbildung 5 sind simulierte 16-gliedrige Ketten übereinander gelegt: ohne Gewichte (dicke, rote Kettenlinie), die mit entsprechenden Gewichten versehene „Hängebrücke" (dicke, blaue Parabel) und eine ideale Parabel (dünne, grüne Linie). Bei einer realen Hängebrücke sind allerdings die Abstände der Haltekabel für die Straße gleich groß. Auch das kann man natürlich mit dem Programm simulieren. Bei dieser Abbildung sind gerade die Abstände der Angriffspunkte der Kabel für die Straße auf dem (Büroklammer-)Tragekabel gleich groß.

Im Internet finden sich unter den Begriffen Kettenlinie, Katenoide oder catenary viele Hinweise sowohl geschichtlicher Art als auch zu Ableitungen. Außerdem gibt es sehr anschauliche Applets, die den Unterschied zwischen der Kettenlinie und der Parabel verdeutlichen.

Zusammenfassung

Mit Büroklammern lassen sich einfach und schnell physikalische Experimente realisieren. Vorgestellt werden zwei ungewöhnliche Kreisel (darunter ein Stehaufkreisel), die sich in wenigen Minuten biegen lassen. Weiterhin lässt sich mit Büroklammern die schon von Leibniz abgeleitete Kettenlinie simulieren. Mit etwas Mehraufwand lässt sich eine „Hängebrücke" bauen, bei der sich für das Tragkabel eine Parabel als Kurvenform ergibt. Im Internet sind Programme verfügbar, mit denen sich Kettenlinie und Hängeparabel simulieren lassen.

Stichworte

Kreisel, Büroklammer, Hängebrücken, Kettenlinie, Katenoide.

Literatur

[1] T. Sakai, Mathematical Sciences, 1986, 271 (1), 18 (in japanisch).
[2] C. Ucke, Phys. Bl. 1998, 54, 440.
[3] Y. Kamishina, Proceedings of International Workshop on Hands-On Activities for In-School and Out-of-School Learners Focusing on the Marginalized Youth, Pattaya, Thailand 1999.
[4] F. Kuypers, Klassische Mechanik, 6. Auflage, Wiley-VCH, Weinheim 2003.

DIE HÄNGEBRÜCKENPARABEL

Stark vereinfacht und idealisiert lässt sich die Form der Kurve von Tragekabeln bei Hängebrücken wie folgt ableiten. In einen Punkt P des Tragekabels einer Hängebrücke wirken drei Kräfte, deren vektorielle Addition sich gerade aufheben muss (Abbildung). Als Erstes wirkt die Gewichtskraft G des Straßenteils der Länge x senkrecht nach unten. Als Zweites wird durch die Spannung des Kabels eine horizontale Kraft S ausgeübt. Diese ist über das ganze Kabel hinweg konstant. Als Drittes wirkt eine Kraft F in Richtung der Tangente des Kabels. Diese Tangentialkraft entspricht gerade der Steigung im Punkt P.

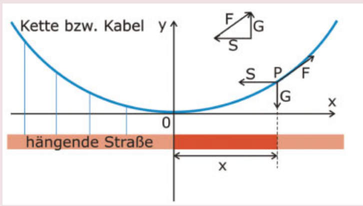
Sei nun μ das Gewicht pro Längeneinheit der am Kabel hängenden Straße. Der Koordinatenursprung 0 liege im Fußpunkt der Kurve. Dann ist das am Punkt P angreifende Gewicht G gerade gleich μx. Bezeichnen wir mit y die Höhe des Kabels im Punkt x, dann ist die Steigung in diesem Punkt

$$y' = \frac{G}{S} = \frac{\mu \cdot x}{S}.$$

Daraus erhalten wir durch Integration

$$y = \int \frac{\mu \cdot x}{S}\,dx = \frac{\mu}{2S}\,x^2 + C.$$

Da der Koordinatenursprung 0 im Fußpunkt der Kurve liegt, muss die Integrationskonstante $C = 0$ sein. Für die Form der Kurve ergibt sich somit eine Parabel.



Bei einer Hängebrücke ergibt sich als Kurvenform für das Tragekabel eine Parabel.

Die Autoren

Christian Ucke und Hans-Joachim Schlichting verfassen seit rund zehn Jahren Artikel für die Serie Spielwiese.

Anschriften

Dr. Christian Ucke, Techn. Univ. München, FMI, Abt. Physik, Boltzmannstr. 3, 85748 Garching. ucke@tum.de

Prof. Dr. Hans-Joachim Schlichting, Didaktik der Physik, Universität Münster, 48149 Münster. schlichting@uni-muenster.de

Zum Thema

Klassische Mechanik, 6. Auflage
F. Kuypers, Wiley-VCH, Weinheim 2003, 665 S., Broschur. 44,90 €.
ISBN 3-527-40474-0