

## Arnolds Katze im Wunderland

H. Joachim Schlichting, U. Backhaus . Universität Osnabrück

*Nichts ist gewiß –  
aber alles kehrt wieder zurück*  
Henri Michaux

*Deterministische dynamische System können sich chaotisch verhalten. Aber das hindert sie nicht daran, nach hinreichend langer Zeit dem Ausgangspunkt wieder beliebig nahe zu kommen. Eine solche Poincarésche Wiederkehr wird an einer einfachen Abbildung veranschaulicht.*

### Anschauung im Zustandsraum

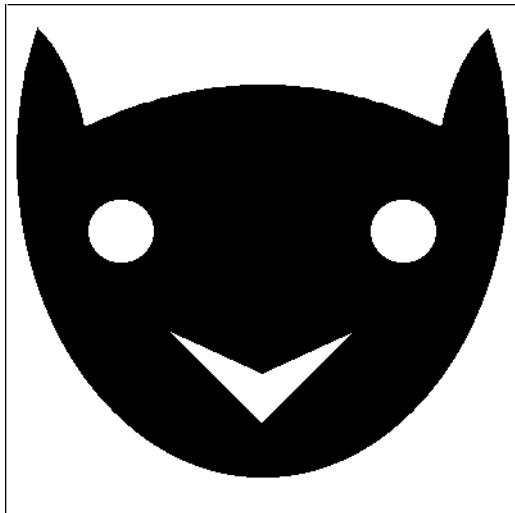


Abb. 2: Arnolds Katze

Die moderne Chaosforschung hat das physikalische Denken in mehrfacher Weise revolutioniert. Die Geometrisierung spielt dabei eine wesentliche Rolle. Dadurch, daß bildhafte Darstellungen teilweise sehr abstrakter physikalischer Sachverhalte es ermöglichen, von bisher nur unzureichend ausgenutzten Fähigkeiten menschlicher Kreativität Gebrauch zu machen (wie z.B. das Vermögen, Muster und Regelmäßigkeiten in Bildern zu erkennen und dingfest zu machen), werden auf einmal Phänomene physikalisch zugänglich, die bislang außerhalb der physikalischen Beschreibung lagen: z.B. chaotische Phänomene.

Der Trick, den Phänomenen eine pittoreske Seite abzugewinnen, besteht im wesentlichen darin, daß man sie nicht im gewöhnlichen Anschauungsraum betrachtet, sondern im sog. Zustandsraum, in dem jedem Systemzustand ein Punkt entspricht. Die

zeitliche Entwicklung des Systems wird dann beschrieben durch die "Bahnen", Orbits, die diese Punkte im Zustandsraum ziehen.

Damit ein isoliertes physikalisches System kon-

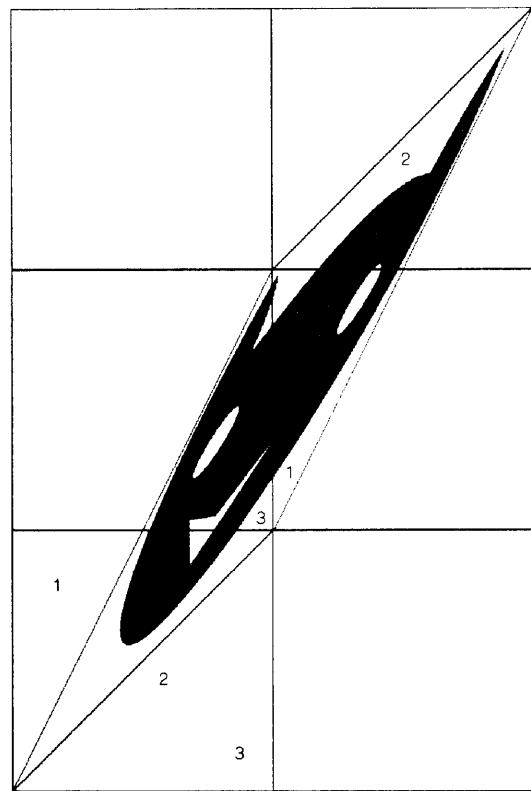


Abb. 1: Veranschaulichung der Streckprozedur starker Energie im Einklang mit den Gesetzen der statistischen Physik und damit der Erfahrung ist, müssen die Orbits im Laufe der Zeit durch jeden Punkt der Energieoberfläche gehen. Diese von Boltzmann geforderte Ergodizität entspricht jedoch insofern noch nicht den Anforderungen der Thermodynamik, als sie nicht garantiert, daß das System auch seine Anfangsbedingungen "vergißt". Das heißt, zwei nicht identische aber beliebig nahe Endpunkte müssen vor hinreichend langer Zeit einmal weit auseinanderliegende Lagen auf der Energieoberfläche eingenommen haben. Zur Ergodizität muß also das Mischen hinzukommen.



Abb. 3: Die 1. Transformation

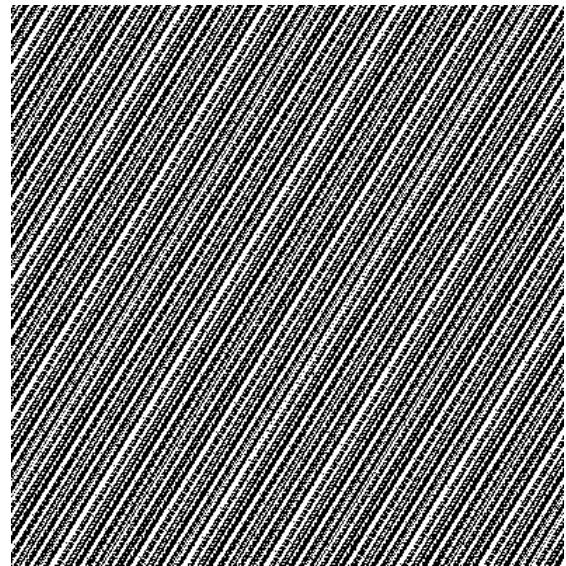


Abb. 6: Die 5. Transformation

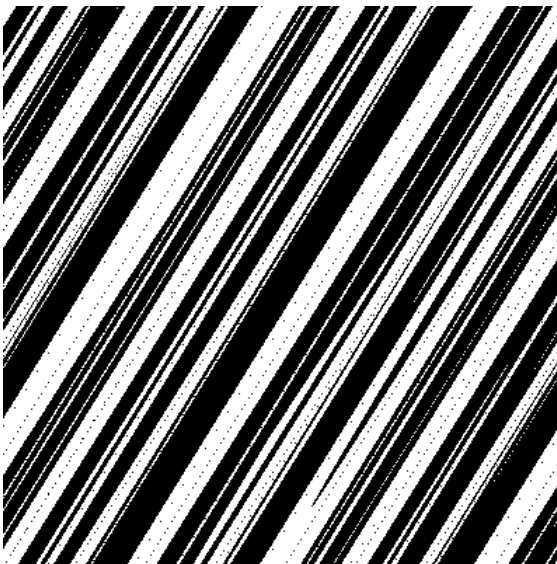


Abb. 4: Die 3. Transformation

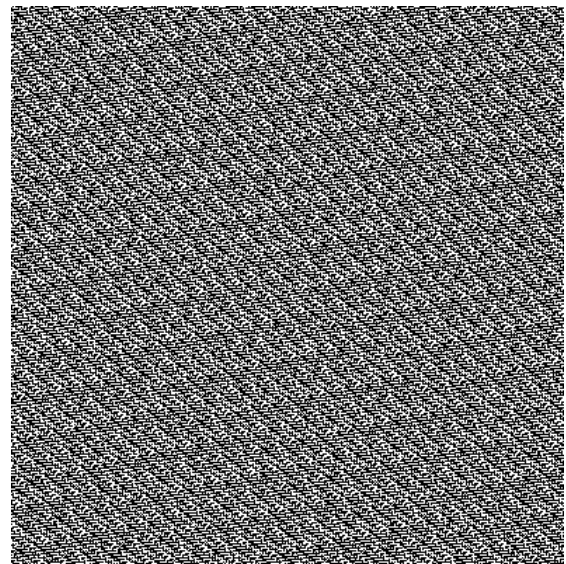


Abb. 5: Die 7. Transformation

## Ein einfaches Modell

Daß nicht nur Gase - wie z.B. das Modellgas aus harten Kugeln (hard sphere gas) - ergodisch und mischend sind, sondern daß dies auch für dynamische Systeme der Fall sein kann, die durch NEWTONS Gleichungen beschrieben werden, erscheint überraschend und soll im folgenden durch eine Serie von Bildern illustriert werden. (Eine mathematische Begründung ist äußerst subtil und langwierig). Dazu betrachten wir ein einfaches Modell. Das Verhalten eines isolierten, konservativen Newtonschen (Hamiltonschen) Systems kann als flächenerhaltende Transformation der Energieoberfläche auf sich selbst angesehen werden. Deshalb genügt es, stellvertretend für viele physikalische Systeme eine

flächenerhaltende Abbildung eines Einheitsquadrates auf sich selbst zu betrachten. Wir gehen im folgenden von der ursprünglich von Arnold vorgeschlagenen Transformation  $T$  aus [1]:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = T(x_n, y_n) = (x_n + y_n, x_n + 2y_n), \pmod{1}.$$

Darin wurde die kontinuierliche Zeitvariable durch den diskreten ganzzahligen Index  $n$  ersetzt.  $\pmod{1}$  steht im wesentlichen für periodische Grenzbedingungen. Als Motiv betrachten wir wie Arnold eine Katze (Abb. 1), die aus der Sicht der statistischen Mechanik als ähnlich bedeutungsvoll angesehen werden kann wie die Schrödingersche Katze.

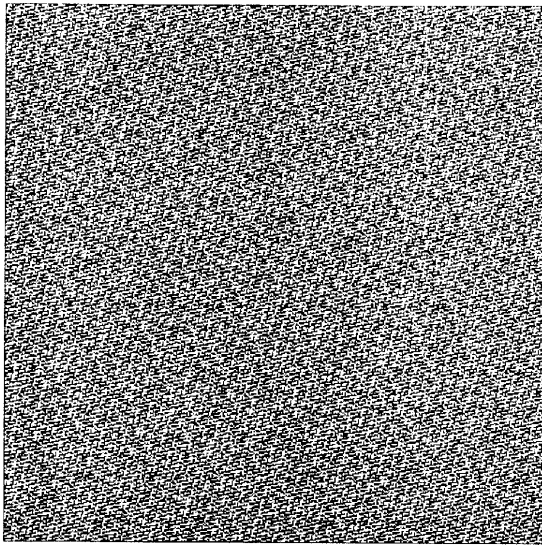


Abb. 7: Die 12. Transformation

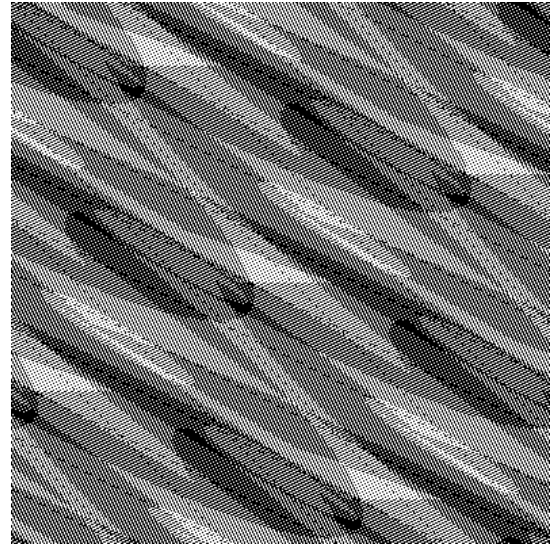


Abb. 9: Die 59. Transformation

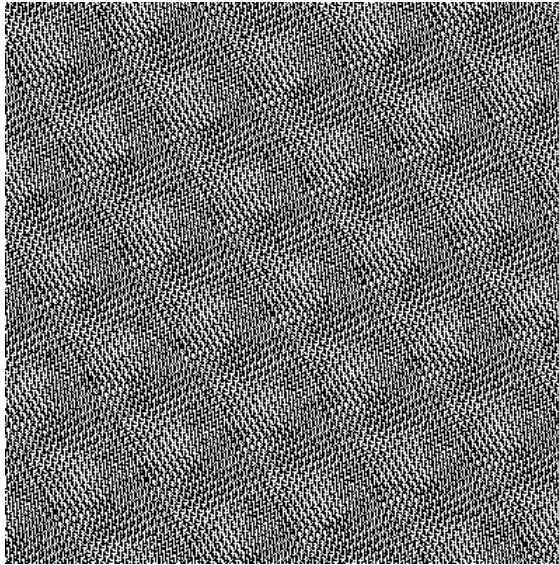


Abb. 8: Die 20. Transformation

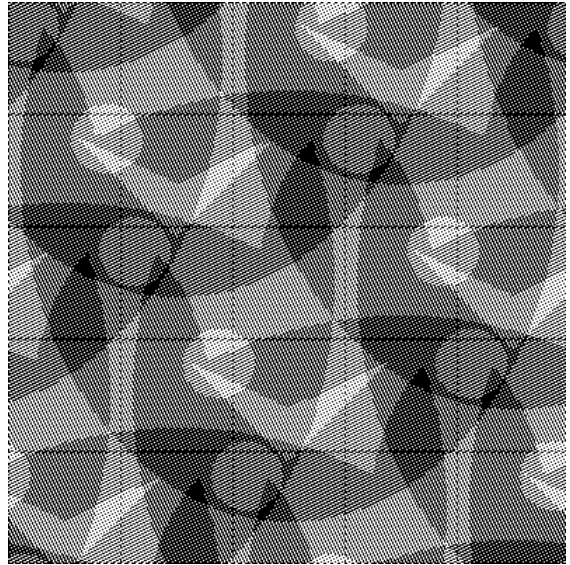


Abb. 10: Die 60. Transformation

Zur Veranschaulichung dieser Transformation stelle man sich vor, die Katze sei auf eine Gummimembran aufgezeichnet. Diese wird in der oberen rechten und unteren linken Ecke angefaßt und auf dreifache Höhe und doppelte Breite gestreckt (Abb. 2). Das mod 1 bedeutet nichts anderes, als daß die aus dem ursprünglichen Quadrat herausgezogenen Teile wie bei periodischen Randbedingungen in die freigewordenen Stellen des Quadrats wieder hineingefaltet werden (Abb. 3 ). (Um diesen Vorgang deutlich zu machen, wurden in Abb. 2 die aus dem ursprünglichen Quadrat herausgezogenen Teile mit denselben Zahlen versehen wie die Stellen, in die sie zurückgefaltet werden. ) Eine solche Prozedur des Streckens und Faltens wird wiederholt ausgeführt und sorgt für eine zunehmende "Durchmischung" der Katze, d.h. für Chaos [2]. Bereits ab

Abb. 5 erinnert nichts mehr an eine Katze. Nach der 8. Transformation sind so gut wie keine Korrelationen mehr zu erkennen, man wird an eine zufällige Punktverteilung, an eine Augenblicksaufnahme eines Gases erinnert. Die Katze erscheint evaporiert (zu Gas geworden) und haschiert. Verfolgt man die Durchmischung weiter, so sieht man mehr oder weniger regelmäßige Strukturen "aufblitzen" (z.B. Abb. 9 ) bis hin zu einem Durchschimmern des Grinsens der Katze (Abb. 10), das sich bereits in Abb. 9 ankündigt. Aber gleich danach ist es wieder verschwunden, um später (120. Transformation) erneut aufzutreten. Abb. 10: 60. Transformation Abb. 11: 150. Transformation

Nach der 150. Transformation (Abb. 11 ) taucht die Katze noch etwas deutlicher auf. Jedenfalls ist ihr

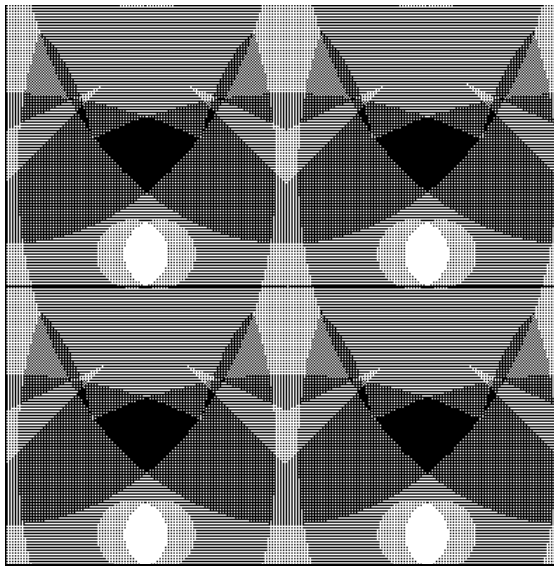


Abb. 11: Die 150. Transformation



Abb. 13: Die 300. Transformation



Abb. 12: Die 299. Transformation

Grinsen nicht zu übersehen. Die 299. Transformation (Abb. 12) kündigt die vollständige Wiederkehr der Katze nach der 300. Transformation (Abb 13) an.

### Die Poincarésche Wiederkehr der Katze

Man wird an Alice im Wunderland erinnert. Alice muß mit einer ganz ähnlichen Katze Bekanntschaft gemacht haben, wie aus der folgenden Unterhaltung hervorgeht, in der sie zur Katze sagt: *"...und außerdem wäre es schön, wenn Sie nicht immer so plötzlich auftauchen und verschwinden würden. Es kann einem ja ganz schwindlig davon werden."* *"In Ordnung", sagte die Katze und verschwand ganz allmählich. Zuerst der Schwanz und zuletzt das Grinsen, das noch eine Weile dablief, während der Rest*

*schon fort war. "Na eine Katze ohne Grinsen", dachte Alice, "das kenne ich, aber ein Grinsen ohne Katze! Das ist denn doch das Unglaublichste, was ich je erlebt habe."* [3]. Abb. 12: 299. Transformation Abb. 13: 300. Transformation

Derartig "unglaubliche" Erfahrungen macht man auch mit chaotischen Systemen: Man hat es mit deterministischen Phänomenen zu tun. Die Zukunft ist aufgrund der wiederholten Anwendung einer einfachen Transformation völlig durch die Gegenwart determiniert: Die Katze ist in jedem Bild irgendwie enthalten und macht sich von Zeit zu Zeit auch bemerkbar. Dennoch ist das, was man sieht, so unregelmäßig, daß man an zufallsbedingte Vorgänge erinnert wird.

Das zeitweilige Wiederkehren der Katze ist eine Eigenschaft der Ergodizität, die bedingt, daß sich ein mischendes System "irgendwann" der Ausgangslage wieder nähert. Man spricht dann von der Poincaréschen Wiederkehr. Die Wiederkehrzeit hängt natürlich von der Größe des Systems ab. In unserem "System", das aus einem Quadrat aus 400 x 400 Bildpunkten besteht, wird die Katze bereits nach einer "Zeit" von 300 Transformationen exakt reproduziert. Bei noch kleineren Quadraten geschieht dies noch früher. In realistischeren Systemen, wie beispielsweise einem Gas, ist eine solche Wiederkehr jedoch äußerst unwahrscheinlich. Sie kommt während der Existenz des Universums rein rechnerisch vielleicht einmal vor. Sie ist daher unbeobachtbar, so daß Arnoldsche Katzen allenfalls im Wunderland eines einfachen mathematischen Modells zu erleben sind.

### Literatur:

[1] V.I. Arnold, A. Avez: Ergodic Problems of Classical

Mechanics. New York: Benjamin 1968.

[2] Das Chaos erzeugende Strecken und Falten läßt sich z.B. am Verhalten eines leicht modifizierten Pohlschen Rades demonstrieren. Siehe dazu: U. Backhaus, H. J. Schlichting: Auf der Suche nach Ordnung im Chaos. MNU 43/8 (1990), 456.

[3] L. Carroll: Alice im Wunderland. Wiesbaden: Vollmer o. Jahr, S. 78. 2 1 3 1 2 3