

Ein Karussell mit chaotischen Möglichkeiten

Von U. Backhaus und H. J. Schlichting

1 Was ist Chaos?

Der Erfolg der klassischen Physik liegt vor allem darin begründet, daß sie die zukünftige Entwicklung eines Systems, dessen Anfangsbedingungen und Dynamik (Bewegungsgleichung) bekannt sind, voraussagen kann. Dies gilt insbesondere für die Bestimmung zukünftiger Planetenbewegungen, Mondfinsternisse und ähnlicher Phänomene. Möchte man jedoch das Verhalten von Gasmolekülen oder von turbulenten Flüssigkeitsströmen vorhersagen, so kommt man über Wahrscheinlichkeitsaussagen nicht hinaus, obwohl auch dort die physikalischen Gesetze gelten. Bis vor nicht allzu langer Zeit war man überzeugt, daß unser unvollständiges Wissen über derart komplexe Systeme die Ursache dafür sei und eine immer genauere Voraussagbarkeit mit Hilfe wachsender Datenmengen und mit Computern möglich sei. Diese Überzeugung wurde inzwischen stark erschüttert. Man hat nämlich entdeckt, daß selbst einfache deterministische Systeme sich zufällig verhalten können. Diese Zufälligkeit ist in einer Weise fundamental, daß sie auch durch noch so umfangreiche Informationen nicht beseitigt werden kann. Man spricht daher von chaotischem Verhalten oder kurz von Chaos.

Wie kommt es dazu, daß manche Systeme sich ordentlich oder regulär, andere aber chaotisch oder unvorhersehbar verhalten? Lange Zeit herrschte die Meinung vor [1], chaotisches Verhalten sei vor allem durch die Komplexität des Systems bedingt. Selbst als Lorenz im Jahre 1963 ein dreidimensionales Modellsystem mit chaotischem Verhalten vorstellte [2], um meteorologische Erscheinungen zu erklären, dauerte es noch fast ein Jahrzehnt, bis sich auch in der physikalischen Fachwelt die Einsicht durchzusetzen begann: Auch einfache Systeme können sich chaotisch verhalten. Jetzt erinnerte man sich wieder an eine längst vergessene Arbeit von Poincaré, der bereits 1892 beim Studium des 3-Körperproblems entdeckte, daß selbst die so stabil erscheinende Himmelsmechanik Probleme herauftaucht, die wir heute als chaotisch bezeichnen würden [3]. Er gab auch schon den Hinweis auf eine mögliche Erklärung: „Eine kleine Ursache, die unserer Aufmerksamkeit entgeht, ruft eine beträchtliche Wirkung hervor, die wir nicht übersehen können“ [4]. Man denke etwa an die labile Gleichge-

wichtslage eines auf dem Kopf stehenden Pendels. Kleinste Einflüsse, die wir nicht im Griff haben, können zu völlig verschiedenen Wirkungen führen, nämlich das Pendel nach links oder rechts kippen zu lassen. Während ein einfaches Pendel jedoch nur eine derart sensible Stelle besitzt, ist ein chaotisches

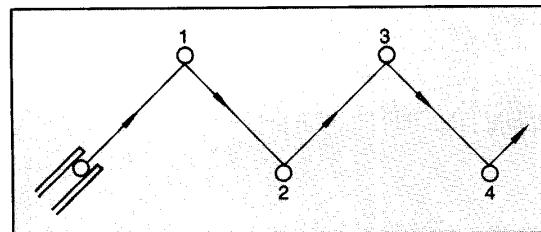


Abb. 1 Ein "Billardspiel" (aus [5])

System an jedem Punkt seiner Bewegung so sensibel: *Jeder noch so kleine Einfluß verändert das System in unvorhersehbarer Weise.*

Das kann man sich im Anschluß an *Sexl* an einer Art Billardspiel klarmachen [5]. Man verlangt, daß der Ball in Abb. 1 nacheinander die festgehaltenen Bälle 1, 2... n treffen soll. Eine kleine Rechnung zeigt dann, daß bei Vernachlässigung der Reibung bereits die 9te Reflexion indeterministisch ist, wenn man nur die prinzipiell vorhandene Unschärfe aufgrund des Planckschen Wirkungsquantums zugrundelegt. Wegen der gekrümmten Oberfläche der zusammenstoßenden Kugeln wächst nämlich die Unschärfe exponentiell an und läßt den Reflexionswinkel nach dem 9ten Stoß beliebig groß werden.

Nichtchaotische Systeme unterscheiden sich so gesehen nur dadurch von chaotischen, daß ein prinzipiell vorhandener Fehler langsamer wächst und daher innerhalb menschlicher Beobachtungszeiten nicht virulent wird. Oder aber die Dämpfung des Systems ist so groß, daß die Veränderungen bereits zum Erliegen gekommen sind, bevor ein größerer Fehler bemerkt werden kann.

Die Beschränkung auf solche nichtchaotischen Systeme hat es erlaubt, so lange die Fiktion vom Determinismus in der Physik aufrechtzuerhalten, obwohl sie in der Realität kaum vorkommen. Trotzdem beruht unser physikalisches Verständnis von der Natur weitgehend auf ihnen. Die daraus resultie-

renden Defizite der physikalischen Weltbeschreibung machen sich aber allenthalben bemerkbar.

Chaotische Systeme sind demnach solche Systeme, in denen wegen des exponentiellen Anwachsen des Fehlers bereits innerhalb kürzester Zeiträume jede Voraussage bedeutungslos wird. Vor diesem Hintergrund erscheint die von Poincaré in Frage gestellte Stabilität unseres Planetensystems in einem, anderen Licht. Max Born schlägt in diesem Zusammenhang vor, die Zeitskalen in der Astronomie und in der Atomphysik zu vergleichen: „*Das Alter der Welt wird auf einige 10^9 Jahre, d. h. Perioden des Erdumlaufs, geschätzt. Die Zahl der Perioden im Grundzustande des Wasserstoffatoms aber ist von der Größenordnung 10^{16} pro Sekunde. Gemessen in den jeweilig natürlichen Einheiten der Zeit, ist also die Sachlage gerade umgekehrt wie die naive Meinung: Die Sternenwelt ist kurzlebig, die Atomwelt äußerst langlebig. Ist es nicht gewagt, aus Erfahrungen in der kurzlebigen Welt Schlüsse zu ziehen, die auch für die langlebige gelten sollen?*“ [6] Ebenso umwälzend wie die Erkenntnis, daß deterministische Systeme chaotisch werden können, ist die Art und Weise eines solchen Übergangs. Es zeigt sich nämlich, daß der *Weg ins Chaos* sehr regelmäßig sein kann. Das System kündigt gewissermaßen den bevorstehenden Zusammenbruch deterministischen Verhaltens an. Es versteht sich von selbst, daß dies von außerordentlichem praktischen Interesse ist: Beispielsweise interessiert man sich in der Medizin dafür, inwieweit sich lebensbedrohende chaotische Herzrhythmen im EKG in einem erkennbaren, also regelmäßigen Muster ankündigen [7]. Mit einem solchen regelmäßigen Weg ins Chaos wollen wir uns im folgenden befassen: Unser *Chaospendel* durchläuft nämlich eine Sequenz von *Frequenzverdopplungen*, die schließlich im Chaos endet. Dieses sog. *Feigenbaumszenario* beobachtet man auch in ganz anderen Systemen, so daß man daraus wie auch aus anderen ähnlich regelmäßigen Szenarien den weitreichenden Schluß ziehen darf: *Das Chaos ist in vielen Fällen in universeller Weise organisiert.* Ordnung und Chaos scheinen stärker ineinander verwoben zu sein, als man es dem üblichen Verständnis nach anzunehmen geneigt ist. Damit wird - was bislang für ausgeschlossen gehalten wurde - das Chaos wenigstens in einem eingeschränkten Sinne der physikalischen Untersuchung zugänglich.

2 Behandlung des Chaos im Unterricht

Unter obiger Perspektive kann das unvorhersagbare, chaotische Geschehen als das Normale angesehen werden, durch das das Vorhersagbare, Geordnete als vorübergehende Erscheinung hervor und schließlich auch wieder zum Verschwinden ge-

bracht wird. Der die Ordnung bedrohende Aspekt des Chaos bedingt das Interesse, herauszufinden,

- wie sich Chaos ankündigt, bzw. wie weit ein physikalisches System vom Chaos entfernt ist und

- wie weit Chaos mit physikalischen Mitteln erfassbar ist.

Auf den ersten Blick erscheint es hoffnungslos, chaotische Erscheinungen in der Schule zu behandeln. Es zeigt sich jedoch, daß ein kompliziertes Systemverhalten wie Chaos nicht notwendig an komplexe Systeme gebunden ist (siehe oben), sondern als Konsequenz *nichtlinearer Wechselwirkungen einfacher Systeme* auftreten kann. Auf diese Weise lassen sich die wesentlichen Merkmale chaotischen Verhaltens an einfachen mechanischen Modellsystemen erarbeiten und auf einem angemessenen Niveau beschreiben. Das *Pohlsche Rad* und *gekoppelte Pendel* sind beliebte Beispiele für eine Einführung ins Chaos (siehe z. B. [8]).

Eine ähnliche Möglichkeit der Komplexitätsreduktion ohne wesentliche Einbußen besteht übrigens auch für die in Vielteilchensystemen auftretenden Phasenübergänge. Sie lassen sich ebenfalls anhand einfacher nichtlinearer mechanischer Systeme diskutieren und für den Physikunterricht fruchtbar machen (siehe z. B. [9]). Daß darüber hinaus der Übergang von Ordnung zu Chaos seinerseits eine *Analogie zu Phasenübergängen* zeigt, weist auf eine erst im Umrissen gesehene Universalität hin [10].

3 Das Chaoskarussell

Wir untersuchen im folgenden ein System, das im wesentlichen aus einem ebenen Pendel besteht, dessen Aufhängepunkt im Abstand r mit der Winkelgeschwindigkeit w um eine senkrechte Achse rotiert (Abb. 2).

Man kann es sich als das Modell der Gondel eines Kettenkarussells vorstellen. Allerdings ist die Bewegung des Pendels durch Fixierung der Achse in der Aufhängung auf die Ebene beschränkt, die durch Rotationsachse und Ausleger aufgespannt wird. Im mitrotierenden Bezugssystem wirken längs der Bahn zwei Kräfte auf den Pendelkörper (Abb. 3): die Tangentialkomponenten der Schwerkraft F , und der Zentrifugalkraft F . Daraus ergibt sich leicht die Bewegungsgleichung:

$$l\ddot{\delta} = -g \sin \delta + \omega^2 (r + l \sin \delta) \cos \delta$$

$$\ddot{\delta} = -\omega_0^2 \sin \delta + \omega^2 (\alpha + \sin \delta) \text{ mit } \omega_0^2 = \frac{g}{l}, \alpha = \frac{r}{l}$$

Dieser entnimmt man durch die Multiplikation mit δ und einmalige Integration einen Ausdruck für ein sog. effektives Potential U .

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{\delta}^2 + \frac{d}{dt} \left[-\omega_0^2 \cos \delta - \Omega^2 \omega_0^2 \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin \delta \right) \cdot \sin \delta \right] = 0$$

oder

$$U = \omega_0^2 (1 - \cos \delta)$$

$$-\Omega^2 \omega_0^2 \cdot \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin \delta \right) \sin \delta \left(\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

und eine Bestimmungsgleichung für den Gleichgewichtswinkel δ_0 :

$$\sin \delta_0 = \Omega^2 (\alpha + \sin \delta_0) \cos \delta_0$$

Die Gleichgewichtslage zeigt eine phasenüber-

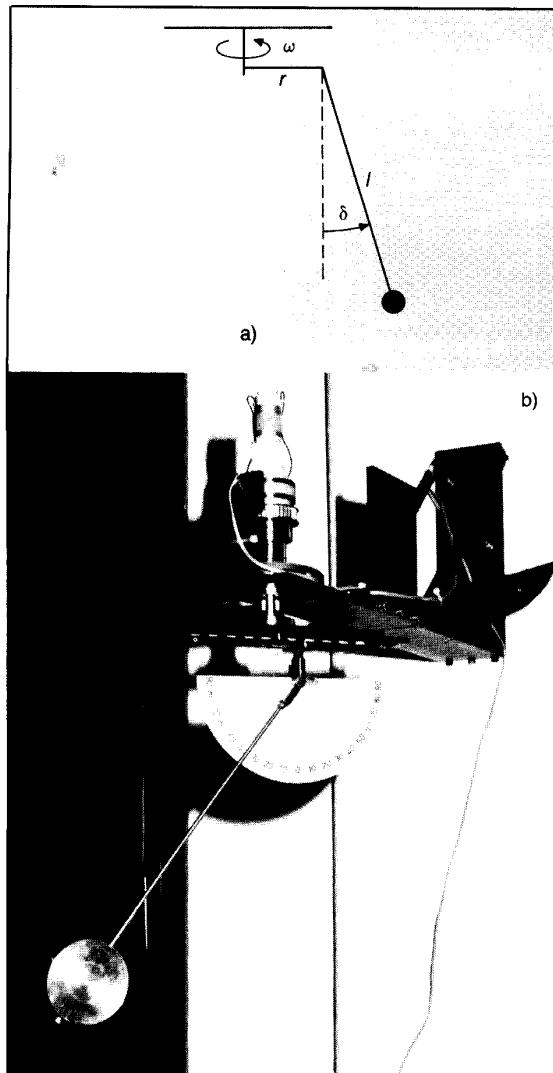


Abb. 2 Das „Chaoskarussell“ **a** Prinzipskizze, **b** Experimentelle Realisation zur Untersuchung der Gleichgewichtslage: mit dem kleinen Motor kann während der Drehung die Länge des Auslegers variiert werden.

gangsartige Abhängigkeit von den Parametern α

und Ω^2 , die wir an anderer Stelle [11] beschrieben haben. Um die Anzahl der freien Parameter klein zu halten, beschränken wir uns hier auf den Fall der Aufhängung in der Rotationsachse ($\alpha = 0$), der sich auch leicht experimentell realisieren lässt (z. B. mit einem Metallbaukasten).

In diesem Fall liegt die Gleichgewichtslage bei $\delta_0 = 0^\circ$, solange die Winkelgeschwindigkeit klein ist. Erst ab einer Grenze ($\Omega^2 = 1$) wächst sie schnell zu größeren Werten an. Dieses Verhalten zeigt sich deutlich in der Verformung des Potentials U (Abb. 4), das für $\Omega^2 \leq 1$ nur ein Minimum bei $\delta = 0^\circ$ hat, aus dem dann zwei symmetrisch liegende Minima herauswachsen. Wird das Pendel also bei genügend schneller Umdrehung des „Karussells“ ($\Omega^2 > 1$) einmal angestoßen, so schwingt es unsymmetrisch um eine dieser Gleichgewichtslagen herum, bzw. bei genügender Anfangsauslenkung um beide.

Um realistischer zu sein, berücksichtigen wir die Reibung in der Aufhängung des Pendels. Um trotz dem stationären Schwingungen erwarten zu können, muß dann zusätzlich ein Antrieb eingebaut werden, den wir der Einfachheit halber als harmonisch ansetzen. Damit nimmt die zu untersuchende Bewegungsgleichung folgende Gestalt an:

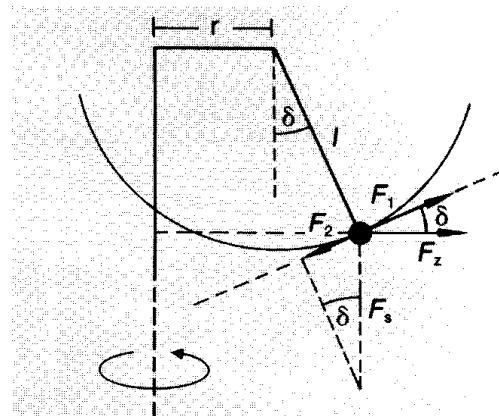


Abb. 3 Zur Ableitung der Bewegungsgleichung

$$\ddot{\delta} = -\rho \dot{\delta} - \omega_0^2 \sin \delta + \Omega^2 \omega_0^2 \sin \delta \cos \delta + f \sin \omega_a t$$

Wir integrieren diese explizit zeitabhängige Bewegungsgleichung, indem wir sie in ein System dreier Differentialgleichungen erster Ordnung umformen:

$$\left. \begin{array}{l} x := \delta \\ y := \dot{\delta} \\ z := \omega_a t \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\rho y - \omega_0^2 \sin x + \Omega^2 \omega_0^2 \sin x \cos x + f \sin z \\ \dot{z} = \omega_a \end{array} \right.$$

Wir lösen dieses System mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung. Dabei hat sich in den meis-

ten Fällen eine Integrationsschrittweite von 50 Schritt pro Anregungsperiode als ausreichend erwiesen.

Die in den weiteren Abschnitten beschriebenen Ergebnisse haben wir mit folgenden mehr oder weniger zufällig ausgewählten Parametern erhalten:

$$\omega_0 = 1s^{-1}, \omega_a = 1s^{-1}.$$

Die Behandlung des Problems wurde auf einem ATARI 520 ST+ in Pascal programmiert. Die Diagramme wurden als Hardcopies des Bildschirms erhalten.

4 Das Konzept des Attraktors

Im Mittelpunkt der folgenden Überlegungen steht

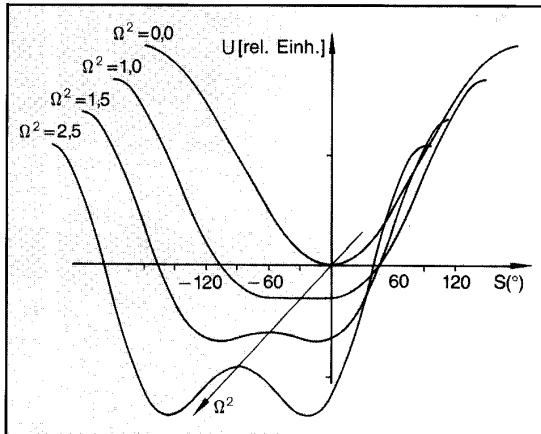


Abb. 4 Das effektive Potential des „armlosen“ Pendels ($\alpha = 0$) als Funktion des Auslenkungswinkels δ für verschiedene Winkelgeschwindigkeiten

das oben beschriebene *Chaoskarussell*. Es handelt sich thermodynamisch gesehen um ein einfaches *dissipatives System* (siehe unten). Die dem System per Antrieb zugeführte Energie wird im zeitlichen Mittel als Wärme wieder an die Umgebung abgegeben. Zwar ist chaotisches ebenso wie reguläres Verhalten nicht an dissipative Systeme gebunden. Diese sind aber insofern von besonderer Bedeutung, als alle realen Systeme als dissipativ anzusehen sind.

Für dissipative Systeme ist das Konzept des *Attraktors* fundamental. Der Attraktor ist anschaulich gesprochen etwas, das das Systemverhalten im Laufe der Zeit zustrebt, bzw. das Systemverhalten „anzieht“. Es ist zwar im abstrakten Orts-Geschwindigkeitsraum (*Phasenraum*) definiert, erlaubt aber letztlich, Chaos mit Hilfe geometrischer

Beziehungen zu beschreiben und zu untersuchen [12].

Lenkt man beispielsweise bei unserem *Chaoskarussell* eine Gondel aus, so kommt sie nach einer gewissen Zeit wieder in ihrer jeweiligen Gleichgewichtslage zur Ruhe. Die Bahn im Phasenraum zieht sich auf einen Punkt zusammen (Abb. 5). Dieser Fixpunkt ist der Attraktor. Hält man die Gondel durch einen (z. B. harmonischen) Antrieb in Schwingung, so beobachtet man ein anderes Grenzverhalten. Die Phasenraumbahn läuft nach einer gewissen Einschwingzeit in sich selbst zurück. Der

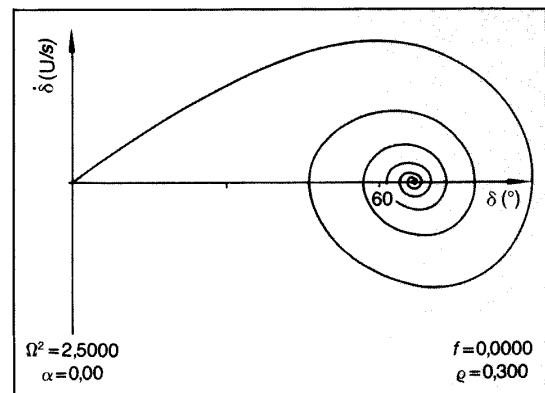


Abb. 5 Punktattraktor: Ohne Antrieb kommt das Pendel bei der Gleichgewichtslage zur Ruhe: Die Bahnkurve im Phasenraum wird vom Punkt ($\delta = 66.4^\circ$ / $\dot{\delta} = 0$) „angezogen 4“

Attraktor ist nunmehr ein sogenannter *Grenzzyklus* (Abb. 6 rechts). (Ein Grenzzyklus ist übrigens charakteristisch für das reguläre Endverhalten *sich selbst organisierender dissipativer Systeme* [13]).

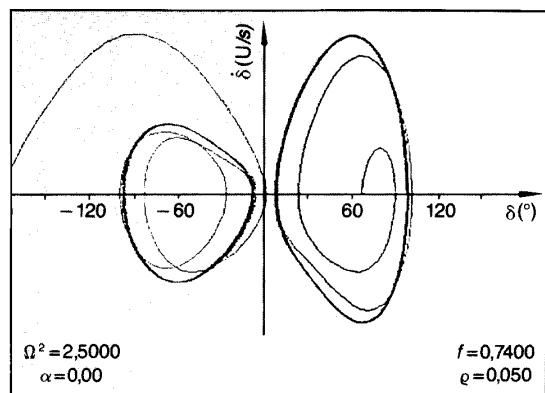


Abb. 6 Grenzzyklus: Solange die Anregungsamplitude f nicht zu groß ist ($f < 0.745$), schwingt das Pendel nach kurzer Einschwingzeit mit konstanter Amplitude unsymmetrisch um eine der beiden Gleichgewichtslagen: Das Systemverhalten wird von einem der beiden Grenzzyklen angezogen

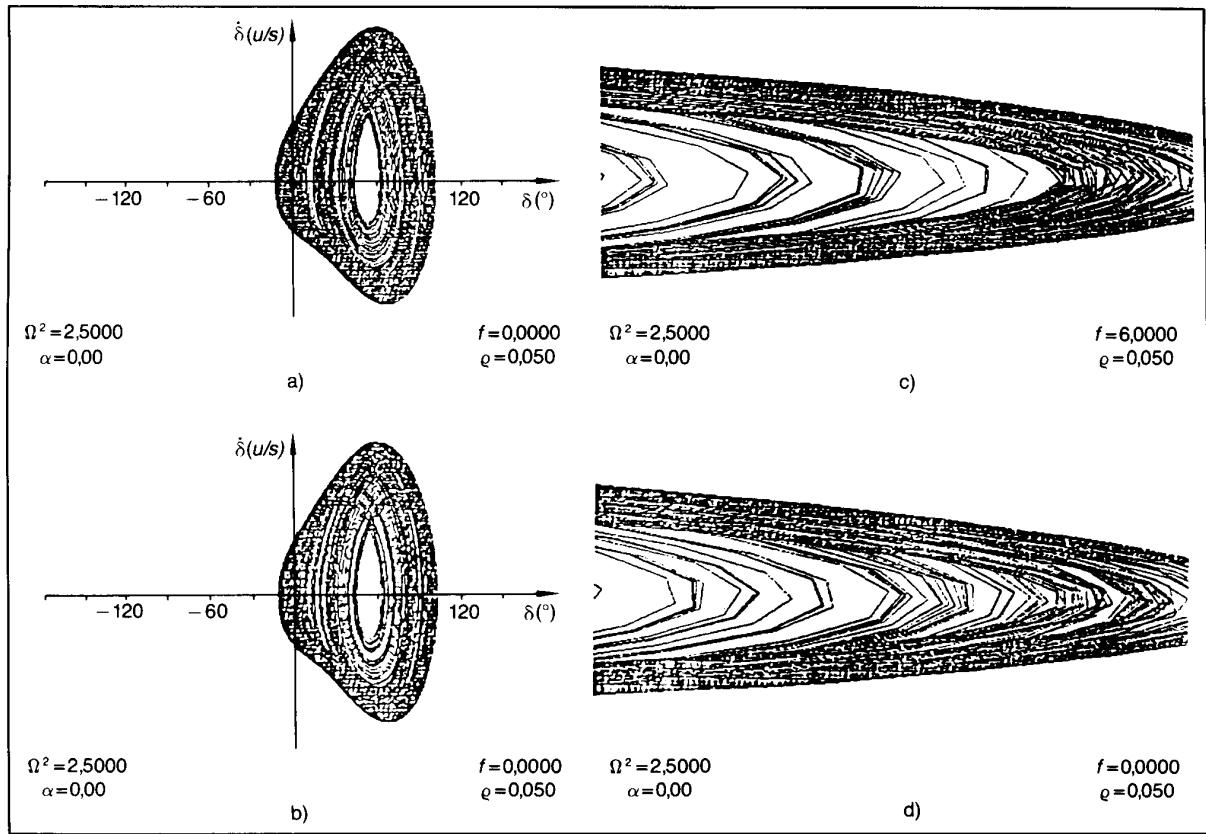


Abb. 7 Chaotischer Attraktor: Übersteigt die Anregungsamplitude f einen gewissen Grenzwert ($f \approx 0.783$), dann antwortet das Pendel mit ständig wechselnden Amplituden. Für geringfügig unterschiedliche Anfangszustände (a. und c. $\delta_0 = 0^\circ$, b. und d. $\delta_0 = 1^\circ$) ist das Grenzverhalten im Großen identisch (a. und b.). Die Details sind jedoch völlig verschieden (c. und d. zeigen den Bereich $90^\circ \leq \delta \leq 100^\circ$). Die Bilder zeigen die Reaktion des Pendels auf die ersten 300 Anregungsperioden.

Das Karussell besitzt noch weitere Grenzzyklen. Geht man nämlich von anderen Anfangsbedingungen aus, so gelangt man gegebenenfalls zu einem ganz anderen Grenzzyklus (Abb. 6 links). Die Anfangsbedingungen (Punktmengen im Phasenraum), die sich zu einem bestimmten Attraktor entwickeln, nennt man den Einzugsbereich oder das Bassin des Attraktors.

Neben Punkt- und Grenzzykel- gibt es bei mehrdimensionalen Systemen den *Torus-Attraktor*, bei dem sich die Bahnkurve um einen Torus herumwindet. Er kommt durch eine Überlagerung mehrerer unabhängiger Schwingungen zustande.

Bis zur Entdeckung des ersten *chaotischen Attraktors* durch Lorenz im Jahre 1963 [21] war der Torus in höherdimensionalen Räumen das Komplizierteste, das man kannte. *Der chaotische Attraktor reflektiert das chaotische Systemverhalten auf geometrischer Ebene:* Dem exponentiellen Anwachsen von Unschärfen entspricht eine exponentiell wachsende Auseinanderentwicklung ursprünglich benachbarter Bahnen. Dieser Attraktor wird auch *seltsamer*

Attraktor genannt. Seine Seltsamkeit kommt darin zum Ausdruck, daß er *global eine stabile, lokal aber eine instabile Struktur* besitzt. Betrachtet man beispielsweise für einen gegebenen Satz von Anfangsbedingungen im chaotischen Bereich, die in einem Parameter geringfügig voneinander abweichen die zugehörigen (chaotischen) Attraktoren, so sind sie in der äußeren Form kaum zu unterscheiden (Abb. 7a u. b). Betrachtet man jedoch die Vergrößerung eines lokalen Ausschnitts, so stellt man einen großen Unterschied in den Bildern fest (Abb. 7c u. d). Das bedeutet, daß sich die von nahezu gleichen Anfangsbedingungen ausgehenden (sozusagen benachbarten) Bahnkurven bald beliebig weit voneinander entfernt haben und völlig verschiedene Spuren ziehen. Das Seltsame des chaotischen Attraktors röhrt schließlich auch noch daher, daß er zwar wie ein Grenzzyklus das "stationäre" Endverhalten des Systems charakterisiert, dabei jedoch die Bahnkurve niemals in sich selbst zurückläuft.

5 Simulationen

Im folgenden soll anhand einiger typischer Darstellungen für ausgewählte Parameterbereiche das chaotische Systemverhalten und vor allem der Übergang vom regulären zum chaotischen Verhalten demonstriert werden. Die Zahl der Parameter bietet dazu eine Vielzahl von Möglichkeiten. Wir mußten daher eine Auswahl treffen. Dazu bot sich die Anregungsamplitude f als in der Praxis am leichtesten zu variierende Größe an. Um zu zeigen, daß auch

aufgrund der Variation anderer Parameter Übergänge vom regulären zum chaotischen Verhalten induziert werden können, haben wir darüber hinaus den Dämpfungsparameter ρ variiert. Alle anderen Parameterwerte wurden festgehalten.

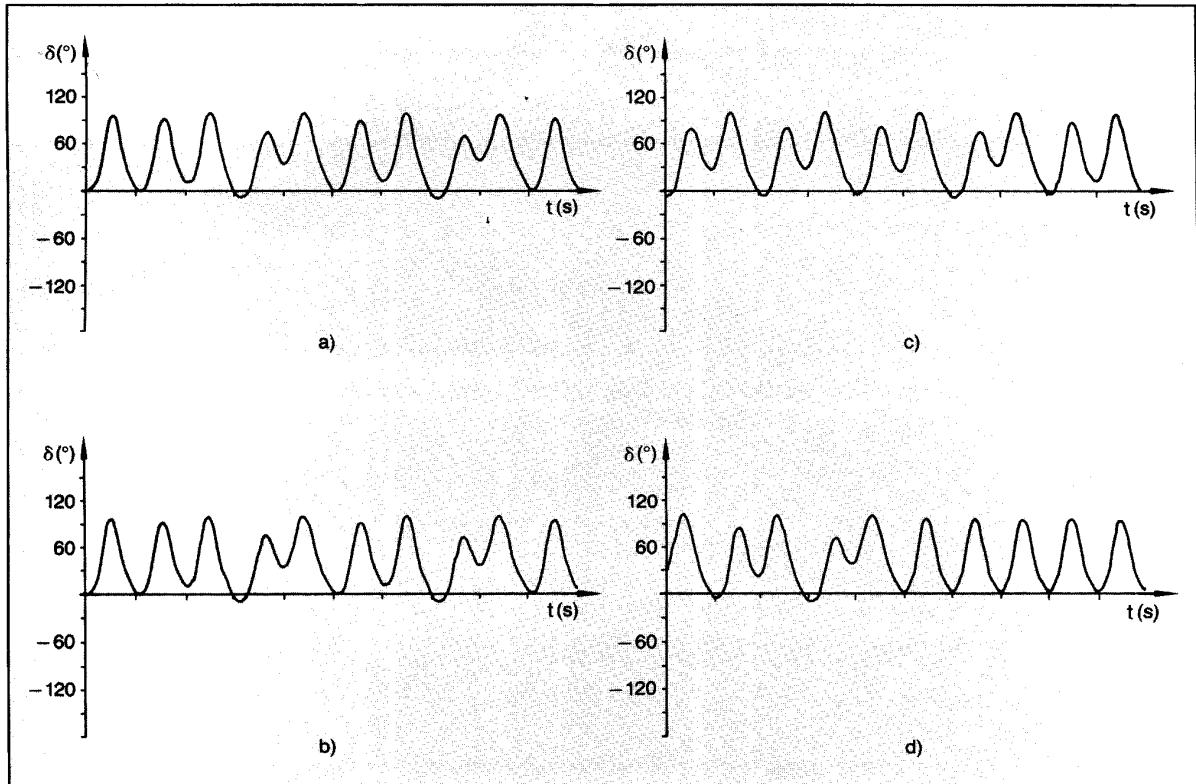


Abb. 8 Empfindlichkeit des Pendels im chaotischen Bereich gegen winzige Störungen: Ein kleiner Unterschied in den Anfangsbedingungen (a. und c. $\delta_0 = 0^\circ$, b. und d. $\delta_0 = 0.01^\circ$) macht sich in den ersten 10 Perioden (a. und b.) nicht bemerkbar, führt aber bereits nach 40 Perioden (c. und d.) zu völlig verschiedenem Systemverhalten

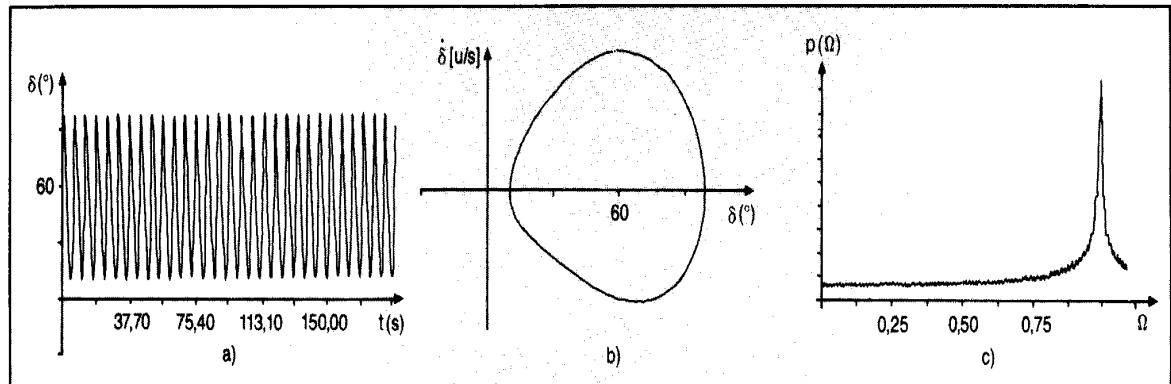


Abb. 9 Übergang des Pendels ins Chaos bei wachsender Anregungsamplitude f , dargestellt als a) Ort-Zeit-Diagramm, b) Phasendiagramm und c) Fourierspektrum (Deren Unvollkommenheit ist auf die Einfachheit der Rechenroutine und auf die kleine Anzahl der "Meßwerte" (100 Perioden) zurückzuführen) $f = 0,7$

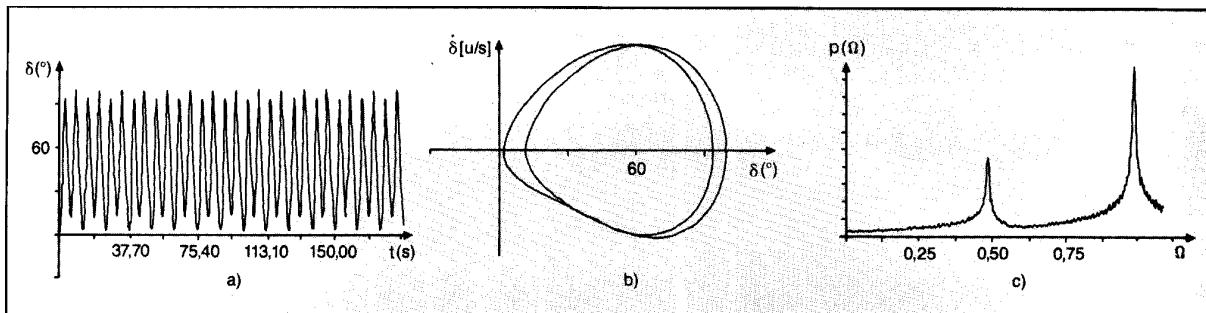


Abb. 10 Übergang des Pendels ins Chaos bei wachsender Anregungsamplitude f , dargestellt als **a** Ort-Zeit-Diagramm, **b** Phasendiagramm und **c** Fourierspektrum (Deren Unvollkommenheit ist auf die Einfachheit der Rechenroutine und auf die kleine Anzahl der "Meßwerte" (100 Perioden) zurückzuführen) $f = 0.75$

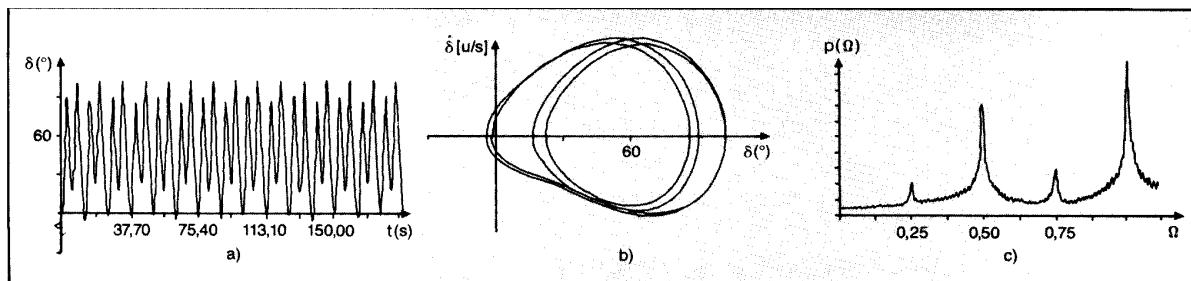


Abb. 11 Übergang des Pendels ins Chaos bei wachsender Anregungsamplitude f , dargestellt als **a** Ort-Zeit-Diagramm, **b** Phasendiagramm und **c** Fourierspektrum (Deren Unvollkommenheit ist auf die Einfachheit der Rechenroutine und auf die kleine Anzahl der "Meßwerte" (100 Perioden) zurückzuführen) $f = 0.775$

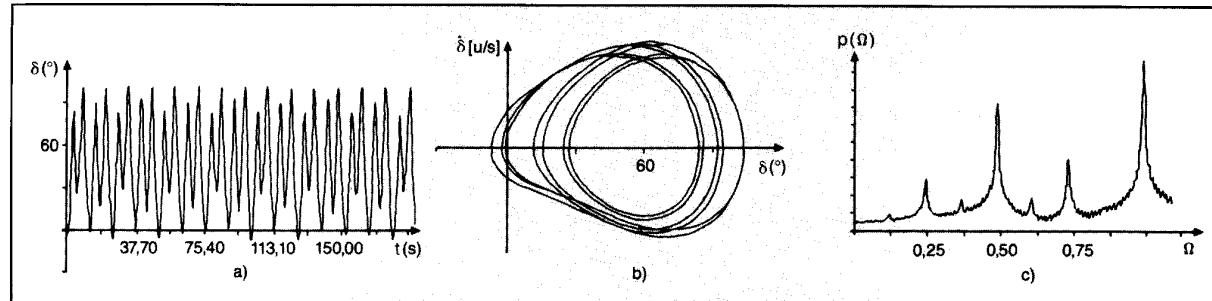


Abb. 12 Übergang des Pendels ins Chaos bei wachsender Anregungsamplitude f , dargestellt als **a** Ort-Zeit-Diagramm, **b** Phasendiagramm und **c** Fourierspektrum (Deren Unvollkommenheit ist auf die Einfachheit der Rechenroutine und auf die kleine Anzahl der "Meßwerte" (100 Perioden) zurückzuführen) $f = 0.782$

5.1 Einschwingverhalten

Wie man es von erzwungenen Schwingungen kennt, muß eine gewisse Einschwingzeit abgewartet werden, um zum stationären Endverhalten des Systems zu gelangen. Da das Einschwingverhalten La. irregulär ist, kann es vom chaotischen Endverhalten nur schwer unterschieden werden. Deshalb muß im letzteren Fall hinreichend lange gewartet werden, um sicher sein zu können, daß das System nicht doch noch regulär wird.

5.2 Exponentielles Wachstum von Fehlern

Während für den regulären Schwingungsbereich geringfügige Unterschiede in den Anfangsbedingungen das Einschwingverhalten ebenfalls nur geringfügig beeinflussen und im stationären Endverhalten sogar vollständig aufgehoben sind (die Anfangsbe-

dingungen werden vergessen), schaukeln sie sich im chaotischen Bereich sehr schnell so weit auf, daß ein völlig andersartiges Verhalten resultiert. Letzteres entnimmt man der Abb.8. Die Anfangsauslenkung unterscheidet sich in beiden Fällen um 1/100 Grad. Zwar ist in den ersten zehn Schwingungen von diesem Unterschied noch nichts zu merken (Abb. 8a u. b). Jedoch sind bereits die Schwingungen 40 bis 50 völlig verschieden voneinander (Abb. 8c u. d).

5.3 Darstellungsarten

In den Abb.9 bis 14 wird reguläres und chaotisches Endverhalten des Chaospendels auf drei verschiedene Weisen dargestellt. Die Vorteile der einen Darstellungsart vor der anderen erweisen sich vor allem bei der Untersuchung der Übergänge ins Chaos (siehe unten), wo es häufig schwierig ist,

verbleibende Regelmäßigkeiten zu erkennen. Im vorliegenden Fall ist die Sachlage eindeutig: Das reguläre Endverhalten, wie es sich insbesondere in dem einfachen Grenzzyklus und dem deutlichen Peak im Frequenzspektrum manifestiert, beinhaltet ein Höchstmaß an Ordnung (Abb. 9b und c). Dem chaotischen Attraktor und dem unregelmäßigen Frequenzspektrum hingegen ist kaum Ordnung mehr anzusehen (Abb. 14b und c).

sich bei $f = 0,7718$ erneut aufspalten und zu einer weiteren Frequenzverdopplung, insgesamt also zu einer *Frequenzvervierfachung*, Anlaß geben (Abb. 11a). Der zugehörige Attraktor hat dementsprechend vier „Umlaufbahnen“ (Abb. 11b) und das Frequenzspektrum vier Peaks (Abb. 11c). Die Verdopplung wiederholt sich bei weiterer Vergrößerung von f in immer kürzer werdenden Abständen, so daß es schwierig wird, sie weiter zu verfolgen.

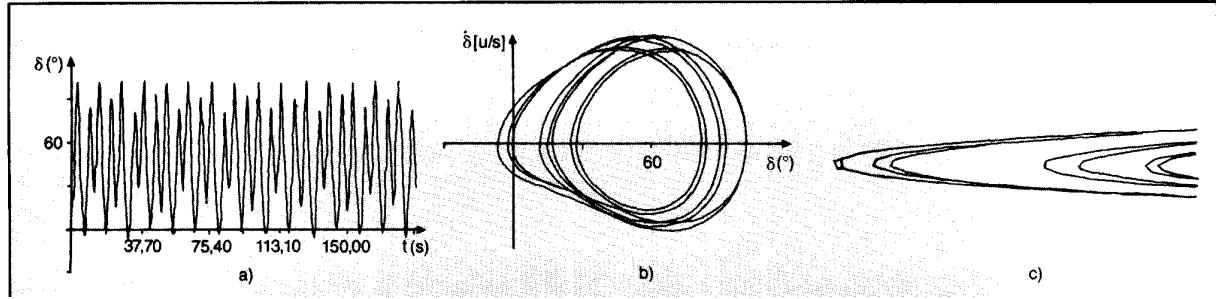


Abb. 13 Übergang des Pendels ins Chaos bei wachsender Anregungsamplitude f , dargestellt als **a** Ort-Zeit-Diagramm, **b** Phasendiagramm und **c** Fourierspektrum (Deren Unvollkommenheit ist auf die Einfachheit der Rechenroutine und auf die kleine Anzahl der „Meßwerte“ (100 Perioden) zurückzuführen) $f = 0,7824$ (Hier zeigt **c** statt des Fourierspektrums eine Vergrößerung des Attraktors im Bereich $-7^\circ \leq \delta \leq 0^\circ$)

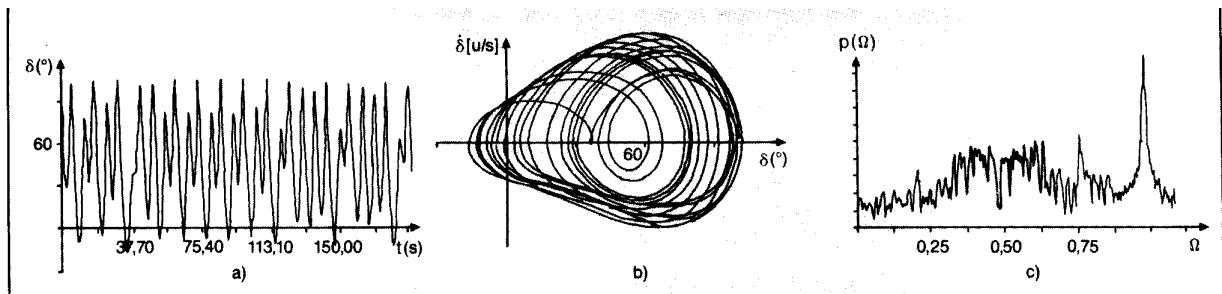


Abb. 14 Übergang des Pendels ins Chaos bei wachsender Anregungsamplitude f , dargestellt als **a** Ort-Zeit-Diagramm, **b** Phasendiagramm und **c** Fourierspektrum (Deren Unvollkommenheit ist auf die Einfachheit der Rechenroutine und auf die kleine Anzahl der „Meßwerte“ (100 Perioden) zurückzuführen)

5.4 Verdopplungssequenzen

Bei niedrigen Anregungsamplituden f zeigt das Chaoskarussell für die vorliegende Parameterfestlegung stets ein reguläres Endverhalten. Vergrößert man f über den Wert von 0,7445 hinaus, so beobachtet man, daß sich im Orts-Zeit-Diagramm plötzlich zwei verschiedene Amplituden abwechseln. Der stationäre Endzustand ist nunmehr durch zwei Frequenzen gekennzeichnet. Man spricht von *Frequenzverdopplung*. Das System pendelt gewissermaßen zwischen zwei Endzuständen hin und her (Abb. 10a). Dem entspricht im Phasenraum eine einfache Aufspaltung des Grenzzyklus (Abb. 10b). Im Frequenzspektrum tritt neben der Anregungsfrequenz ω_a die halbe Anregungsfrequenz auf (Abb. 10c).

Bei weiterer Vergrößerung von f wachsen die beiden Amplituden immer weiter auseinander bis sie

sie endet schließlich im Chaos, dem im Phasenraum ein chaotischer Attraktor entspricht (Abb. 14). In den Abb. 12 und 13 sind noch die 8- und 16-fache Aufspaltung dargestellt.

Eine Ausschnittsvergrößerung zeigt, daß die Attraktoren der vorangegangenen Verdopplungssequenzen noch als Überstruktur zu erkennen sind (Abb. 13c). Darin deutet sich bereits die sogenannte *fraktale Struktur* [14] des im Grenzfall einer unendlich fortgesetzten Verdopplungssequenz entstehenden chaotischen Attraktors an: Jede Ausschnittsvergrößerung zeigt wieder dieselbe Verdopplungsstruktur (*Selbstähnlichkeit*).

5.5 Feigenbaumszenario

Einen Überblick über die gesamte Verdopplungssequenz erhält man, wenn man die Schwingungsmimima im stationären Endverhalten gegen den varierten Parameter f aufträgt (Abb. 15). Das so er-

zeugte sogenannte *Feigenbaumdiagramm* ist weit über das hier betrachtete spezielle System hinaus von universeller Bedeutung. Wie Feigenbaum zeigen konnte, ist es typisch für den "geordneten" Übergang ins Chaos bei einer ganzen Klasse unterschiedlicher chaotischer Systeme [15]. Ob man nun die logistische Gleichung betrachtet, die das Wachstum von Lebewesenpopulationen beschreibt [16], oder eine Bewegungsgleichung, die die Dynamik eines Prellballs [17], eines chaotischen Schwingkreises [18] oder unseres Chaoskarussells beinhaltet, immer erhält man für geeignet gewählte Parameter den obigen „Feigenbaum“.

Dabei stimmen die Feigenbäume nicht nur qualitativ überein. Die Verhältnisse der Abstände zwischen

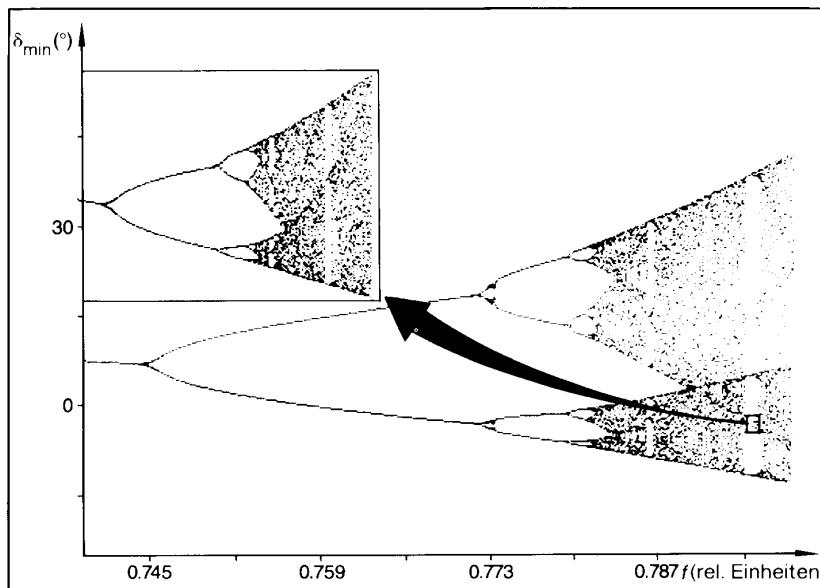


Abb. 15 Der Übergang ins Chaos als Feigenbaum-Diagramm: Die Anregungsamplitude wurde von $f = 0.74$ bis $f = 0.808$ in etwa 550 Schritten vergrößert. Für jeden Wert von f wurden nach 50 Einschwingperioden die Schwingungsminima von 100 weiteren Perioden markiert. Für die Ausschnittsvergrößerung im Bereich $0.79400 \leq f \leq 0.79461$ wurden jeweils nach 200 Einschwingperioden die Minima von weiteren 200 Perioden berechnet. Die Rechenzeit betrug trotz des schnellen Prozessors jeweils mehr als zwei Tage

aufeinanderfolgenden Verzweigungspunkten streben stets dem selben Grenzwert, der universellen Konstante

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(\lambda_{n+1} - \lambda_n)}{(\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1})} \right] = 4,6692\dots$$

zu. Da diese Folge sehr schnell konvergiert, können wir bereits aufgrund der von uns ausgemessenen Verzweigungen das δ zu 4,23, also mit 9 % Genauigkeit bestimmen, indem wir λ durch f ersetzen, wobei n die Verzweigungen durchzählt. Auch die Verhältnisse der Stärke der Aufspaltungen (in unse-

rem Fall die Differenz zwischen den Amplituden bei der jeweils nächsten Aufspaltung) streben einer universellen Konstante $\alpha = 2,5029\dots$ zu, die wir durch unsere Ergebnisse ebenfalls bereits aufgrund der ersten vier Bifurkationen zu 2.59, also mit 3 % Genauigkeit reproduzieren können. Einen gleichen Feigenbaum erhalten wir bei Variation der Dämpfungskonstante ρ . Allerdings erscheint er umgekehrt: Die Verzweigungssequenz tritt mit abnehmendem ρ auf.

Mit dem hier beschriebenen chaotischen Verhalten haben wir nur einen kleinen Ausschnitt aus der Fülle der Möglichkeiten erfaßt. Er entspricht im Bilde des Potentials (Abb. 4) der Beschränkung der Schwingung auf eine Potentialmulde, wobei die Minima der Schwingung in der Gegend des relativen Maximums bei 0^0 auftreten, das die beiden Mulden voneinander trennt. Bei weiterer Vergrößerung des Anregungsparameters f schwappt die Schwingung bis in die jeweils andere Mulde hinein (Abb. 16). In der Folge tritt nach einem breiten chaotischen Band plötzlich in einem weiten Bereich ein reguläres Übergangsverhalten in Form eines 3er Zyklus auf. Diesem 3er Zyklus schließen sich weitere chaotische und reguläre Bereiche an, bis sich schließlich Chaos allmählich wieder auf sehr geordnete Weise über einen inversen Feigenbaum zu einem völlig regulären Verhalten zurückentwickelt.

Dies entspricht wiederum im Bilde des Potentials (Abb. 4) einer Schwingung über beide Mulden hinweg derart, daß das Pendel vom dazwischenliegenden relativen Maximum gleichsam nichts mehr "merkt". Gelangt das Pendel schließlich bei weiterer Vergrößerung von f in den Bereich des Überschlags, dann ist erneut ein Übergang zu chaotischem Verhalten zu beobachten.

5.6 Ordnung im Chaos

Aber nicht nur der Weg ins Chaos erfolgt auf geordnete Weise. Das Chaos selbst besitzt darüber hinaus eine Struktur wie man Abb. 15 entnimmt. Zum einen scheinen sich die Verzweigungsäste im chaotischen Bereich fortzusetzen. Dem chaotischen Rauschen ist eine entsprechende Überstruktur aufgeprägt. Zum anderen gibt es im chaotischen Bereich Fenster, in denen nur die Fortsetzungen der Verzweigungsäste auftreten. Dementsprechend be-

obachtet man in diesen Bereichen wieder entsprechende Zyklen, wie beispielsweise den im Bereich $f = 0,7938$ auftretenden 5er Zyklus. Jeder der fünf Zweige ist übrigens wieder Ausgangspunkt für einen neuen Feigenbaum, wie die Ausschnittsvergrößerung in Abb. 15 auf eindrucksvolle Weise zeigt. Dieser Tochterfeigenbaum stimmt mit dem Mutterfeigenbaum bis ins kleinste Detail überein, insbesondere darin, daß er wiederum ein Fenster mit fünf

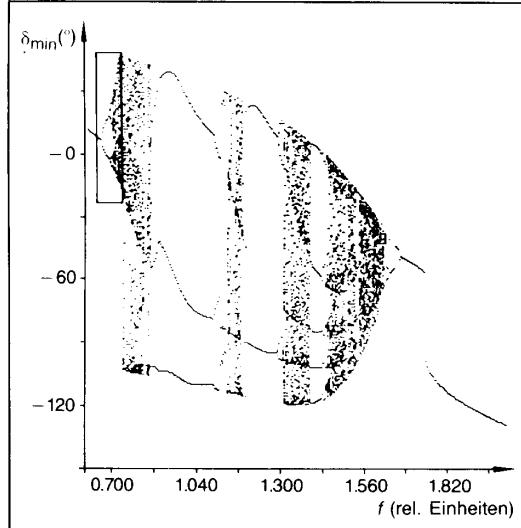


Abb. 16 Übersicht über das Verhalten des Pendels in einem großen Parameterbereich. Der in Abb. 15 sichtbare Ausschnitt ist umrahmt.

Zweigen besitzt, die ihrerseits Ausgangspunkt von Enkelfeigenbäumen sind usw. ad infinitum. Diese an die Ineinanderschachtelung russischer Puppen erinnernde Selbstähnlichkeit bringt die bereits oben erwähnte fraktale Struktur der chaotischen Attraktoren auch auf der Ebene der Feigenbaudarstellung zum Ausdruck [14].

Literatur

- [1] *L.D. Landau, E.M. Lifschitz*: Hydrodynamik. Berlin: Akademie-Verlag 1970
- [2] *E. N. Lorenz*: Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* 20, 130 (1963)
- [3] *J. Moser*: Is the solar system stable? *Math. Intelligencer* 1, 65 (1978)
- [4] *H. Poincaré*: Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Paris: Gauthier-Villars 1892
- [5] *R. Sexl*: Irreversible Prozesse. *Physik und Didaktik* 8/1, 1 (1980)
- [6] *M. Born*: Ist die klassische Physik tatsächlich deterministisch? *Phys. Bl.* 11, 49 (1955)
- [7] *L. Glass, A. Shrier, J. Béair*: Chaotic cardiac rhythms. In: *A. V. Holden* (Ed.): *Chaos*. Manchester: UP 1986
- [8] *K. Luchner, R. Worg*: Chaotische Schwingungen. *PdN-Ph.* 35/4, 9 (1986)
- [9] *R. Rodewald, H. J. Schlichting*: Prinzipien der Synergetik erarbeitet an Spielzeugen. *PdN-Ph.* 35/4, 33 (1986).
- B. Rodewald, H. J. Schlichting*: Ein Spielzeug zur Veranschaulichung von Katastrophen in Ökosystemen. *NiU-P/C*, 8, 294 (1984). Ders.: A catastrophic toy. *Am. J. Phys.* 53/12 (1985).
- H. J. Schlichting, B. Rodewald*: Zum kritischen Verhalten eines invertierten Pendels. *Physik und Didaktik* 15/11 (1987)
- [10] *R. Lipowsky*: Die Renormierung in der statistischen Physik. *Phys. Bl.* 39/12, 387 (1983)
- [11] *P. Farwig, U. Backhaus*: Mathematisches Pendel und Kettenkarussell. In: *A. Scharmann* (Hrsg.): Vorträge auf der Frühjahrstagung der DPG, Gießen 1983, S. 61. *U. Backhaus*: Phasenübergänge 1. und 2. Ordnung an einem einfachen mechanischen System. In: *W. Kuhn* (Hrsg.): Vorträge Physikertagung Gießen 1986, S. 189
- [12] *R. H. Abraham und C. D. Shaw* nutzten solche geometrischen Darstellungen aus, um chaotisches Verhalten zu veranschaulichen. In: *Dynamics - The geometry of behavior, part 2: Chaotic Behavior*. Santa Cruz: University of California 1984
- [13] *H. J. Schlichting, B. Rodewald*: Physikalische Phänomene am Dampf-Jet-Boot. Erscheint in *PdN-Ph.*
- [14] siehe z. B. *H. O. Peitgen, P. H. Richter*: Fraktale und die Theorie der Phasenübergänge. *Phys. Bl.* 42/1, 9 (1986)
- [15] *M. Feigenbaum*: Universal Behavior in Nonlinear Systems. *Los Alamos Science* 1, 4 (1981)
- [16] *D. R. Hofstadter*: Seltsame Attraktoren in der Grauzone zwischen Ordnung und Chaos. *Spektrum der Wiss.* 1, 7 (1982)
- [17] *N. B. Tufillaro, A. M. Albano*: Chaotic dynamics of a bouncing ball. *Am. J. Phys.* 4/10, 993 (1986)
- [18] *W. Lauterborn, W. Meyer-Ilse*: Chaos. *Physik in unserer Zeit* 17/6, 177 (1986). Weitere allgemeinverständliche deutschsprachige Einführungen:
- [19] *U. Deker, H. Thomas*: Die Chaos Theorie. *Bild der Wissenschaft* 1, 62 (1983)
- [20] *J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, N. H. Packard, R. S. Shaw*: Chaos. *Spektrum der Wissenschaften* 2, 78 (1987)
- [21] *R. Graham*: Ein Stück unberechenbarer Natur: Die Turbulenz. *Bild der Wissenschaft* 4, 68 (1982)