

Zum kritischen Verhalten eines invertierten Pendels

H. Joachim Schlichting , Bernd Rodewald

Das Verhalten eines pendelnden Stabs kann sich in ungewohnter Weise ändern wenn man seine Aufhängung in schnelle Oszillation versetzt. Beispielsweise kann das Pendel dazu gebracht werden, „auf dem Kopf stehend“ zu schwingen. Es wird gezeigt, daß dieses Verhalten weitgehende Analogien zum kritischen Verhalten von Vielteilchensystemen (Phasenübergänge 1. und 2. Art) aufweist und damit ein relativ einfaches Modell solcher komplexen Vorgänge darstellt. Experimentell lassen sich die Phänomene zumindest qualitativ bereits mit einem Elektrorasierer realisieren.

Problemstellung

Normalerweise pendelt ein hängender Stab um eine senkrecht unterhalb der Aufhängung liegende Ruhelage. Diese „normale“ Situation kann sich jedoch drastisch ändern, wenn man die Aufhängung einer schnellen periodischen Bewegung unterwirft:

- Wird die Aufhängung auf und abbewegt, so kann man erreichen, daß das Pendel auf dem „Kopf stehend“ also um eine um 180° gedrehte neue Gleichgewichtslage schwingt („Stehpendel“).
- Eine horizontale Hin und Herbewegung der Aufhängung kann zu einer „schrägen“ Schwingung führen. Die Gleichgewichtslage verschiebt sich nach links oder nach rechts aus der ursprünglichen Position heraus.

Wenn die Aufhängung eine Oszillation relativ kleiner Amplitude und hoher Frequenz besitzt, ist sie vom Normalfall der ruhenden Aufhängung kaum zu unterscheiden, und die oben angegebenen Bewegungen werden zumeist als äußerst erstaunlich empfunden. Das mag einer der Gründe dafür sein, daß dieses sogenannte *invertierte Pendel* seit seiner erstmaligen mathematischen Beschreibung durch Kapitza [1] immer wieder Gegenstand didaktisch motivierter Arbeiten [27] gewesen ist. In diesen Arbeiten ist jedoch die Frage kaum untersucht worden, wie die Oszillationen der Aufhängung beschaffen sein müssen, damit

das Pendel sich *noch normal* oder *schon invertiert* verhält.

Dieses Problem des Übergangs vom normalen zum invertierten Verhalten ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Es wird gezeigt, daß ein Pendel mit „angetriebener“ Aufhängung sich auffallend ähnlich wie ein Vielteilchensystem verhält wenn dieses einen Phasenübergang durchmacht. Man denke hierbei z.B. an einen Ferromagneten, der vom ungeordneten paramagnetischen in den geordneten ferromagnetischen Zustand übergeht. Diese Ähnlichkeit erweist sich als sehr weitgehend: Das Pendel weist sowohl ein dem *kontinuierlichen Phasenübergang* (Phasenübergang 2. Art) als auch ein dem *diskontinuierlichen Phasenübergang* (Phasenübergang I Art) entsprechendes Verhalten auf.

Phasenübergänge

Bevor wir auf die Ähnlichkeit eingehen, die das Verhalten des invertierten Pendels mit Phasenübergängen aufweist, seien kurz die wichtigsten Charakteristika solcher Umwandlungen in Vielteilchensystemen skizziert. Einzelheiten entnehme man der einschlägigen Literatur (z.B. [810]). Von einem Phasenübergang spricht man, wenn ein Vielteilchensystem von einer Phase in eine andere übergeht. Dabei ist eine Phase ein Zustand der Materie mit räumlich konstanter Dichte des thermodynamischen Potentials. Beispiele: Ein Phasenübergang legt vor, wenn man Wasser soweit abkühlt, daß es vom flüssigen in den festen Zustand übergeht oder einen Ferromagneten so stark erwärmt, daß er unmagnetisch (paramagnetisch) wird.

Dieser Übergang läßt sich quantitativ durch den sogenannten *Ordnungsparameter* beschreiben. Sein Wert hängt von den äußeren Bedingungen ab, denen das System unterworfen wird. Diese Bedingungen werden durch sog Kontrollparameter wie z.B. die Temperatur im genannten Beispiel erfaßt. Je nachdem, ob sich der Ordnungsparameter kontinuierlich oder diskontinuierlich verändert, spricht man vom Phasenübergang 2. Art oder 1 Art. Wie durch die Begriffsbildung an-

gedeutet, kann ein Phasenübergang als eine Art *Ordnungsänderung* des Systems angesehen werden, die sich in einer *Symmetriebrechung* bemerkbar macht. Geht z.B. Eisen vom unmagnetischen (paramagnetischen) in den ferromagnetischen Zustand über, so entsteht Ordnung, welche sich im Modell der Elementarmagnete durch Ausrichtung derselben in eine Richtung beschreiben läßt. Damit bekommt das Material eine ausgezeichnete Richtung, und die vorher vorhandene Drehsymmetrie im Raum geht verloren („wird gebrochen“).

Auffallend ist die sog *Universalität*, mit der sich völlig verschiedene physikalische Systeme merkwürdig ähnlich verhalten. Diese Ähnlichkeit geht sogar über den engen Bereich der Gleichgewichtsthermodynamik hinaus, in deren Rahmen die Phasenübergänge beschrieben werden. Es zeigt sich, daß vom thermodynamischen Gleichgewicht weit entfernte Systeme, die sogenannten dissipativen Strukturen [11], ein Verhalten zeigen, das große Ähnlichkeiten mit Phasenübergängen aufweist. Dazu gehört das plötzliche Entstehen der sogenannten Benardzellen und das Zünden eines Lasers ebenso wie das Auftreten von Wolkenstraßen oder gar die biologische Evolution [12]. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es u.a. zu zeigen, daß selbst in einem äußerst einfachen offenen System wie dem invertierten Pendel phasenübergangsähnliches Verhalten auftritt. Um diese Ähnlichkeit zu zeigen, untersuchen wir die effektive potentielle Energie des Pendels, welche der freien Enthalpie von thermodynamischen Systemen entspricht. Aus ihr lassen sich alle relevanten Größen, wie etwa der Ordnungsparameter, gewinnen und der Vergleich bis in quantitative Details verfolgen.

Physikalisches Modell des invertierten Pendels

Wir betrachten der Einfachheit halber einen Pendelstab, dessen Schwerpunkt S den Abstand l zur Afhängung A habe. Diese liege im Punkt (X_0, Y_0) eines xy Koordinatensystems (siehe Abb. 1). Die Ruhelage im antriebslosen Fall sei bei $\theta = 0$.

Die Bewegung des Schwerpunkts wird durch die in y Richtung wirkende Schwerkraft $\vec{F}_g = m\vec{g}$ und die auf den Antrieb ausgeübte, durch den starren Stab übertragene periodische Kraft \vec{F} bestimmt. Der Drehimpulssatz liefert:

$$\vec{D} = (\vec{F}_g + \vec{F}) \times \vec{l} = I_S \vec{\theta}. \quad (1)$$

(I_S und $\vec{\theta}$ sind Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung des Pendelstabs). In Komponentenschreibweise ergibt sich:

$$\begin{aligned} I_S \ddot{\theta} &= -(F_x y - F_y x) \\ &= l(F_y \sin \theta - F_x \cos \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

mit $F_x = m \ddot{x}$ und $F_y = m \ddot{y} - mg$. Die x und y Ortskoordinaten des Pendelschwerpunktes setzen sich aus zwei Anteilen zusammen:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + l \sin \theta \\ y &= y_0 + l \cos \theta \end{aligned} \quad (3)$$

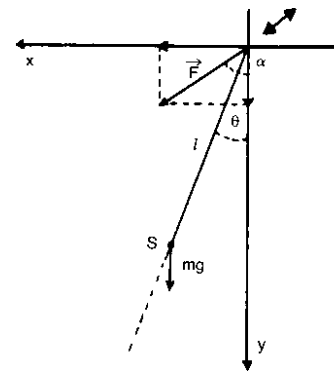


Abb. 1: Schematische Darstellung des Pendels um den Winkel θ ausgelenkt und angetrieben durch eine periodische Kraft \vec{F} , deren Richtung um den Winkel α von der y Achse abweicht.

x_0 und y_0 werden durch den periodischen Antrieb \vec{F} bewirkt und haben folgende allgemeine Form:

$$\begin{aligned} x_0 &= A \cos \omega t \sin \alpha \\ y_0 &= A \cos \omega t \cos \alpha \end{aligned} \quad (4)$$

Dabei sind A und ω Amplitude und Frequenz der periodischen Bewegung. Die Richtungsabweichung des Antriebs von der vertikalen wird durch den Winkel α beschrieben. Setzt man Gleichung (3) und (4) in Gleichung (2) ein und benutzt die Abkürzung $L := (I_S + ml^2)/ml$ so erhält man:

$$\begin{aligned} L \ddot{\theta} + A \omega^2 \cos \omega t (\cos \alpha \sin \theta \\ - \sin \alpha \cos \theta) + g \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Da wir uns im folgenden nur für das Verhalten des Pendels im zeitlichen Mittel interessieren, können wir darauf verzichten, die Bewegungsgleichung (5) zu lösen. Es genügt, $\theta(t)$ in Gleichung (5) durch seinen Mittelwert über Zeiten der Größe $2\pi/\omega$ zu ersetzen. Da im folgenden nur noch dieser Mittelwert vorkommt, können wir ihn der Ein-

fachheit halber ebenfalls mit θ bezeichnen. Dann gilt im Falle $\omega^2 \gg g/L$ und $A/L \ll 1$ näherungsweise

$$\ddot{\theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} U(\theta, \omega^2) = 0 \quad (6a)$$

Dabei ist

$$U(\theta, \omega^2) = \frac{A}{4L} \omega^2 \sin^2(\theta - \alpha) - g \cos \theta \quad (6b)$$

die sog. effektive potentielle Energie (Einzelheiten entnehme man z.B. [1])

Anhand von U läßt sich das Verhalten der Gleichgewichtslagen θ_0 des Pendels unter verschiedenen Bedingungen studieren.

Analogie zum kontinuierlichen Phasenübergang

Es liegt auf der Hand, die jeweils vom Pendel eingenommene Gleichgewichtslage θ_0 , um die das Pendel schwingt, als die dem Ordnungsparameter entsprechende Größe anzusehen. $\theta_0 = 0$ bedeutet eine Position des Pendels, welche bezüglich Spiegelungen des Systems an der y-Achse symmetrisch liegt und entspricht der ungeordneten Phase eines Vielteilchensystems $\theta_0 \neq 0$ entspricht der geordneten Phase; die angesprochene Links-Rechts-Symmetrie des Systems ist hier gebrochen. In der geordneten Phase befindet sich das Pendel nicht mehr im (thermodynamischen) Gleichgewicht Sie kann daher nur durch Energieaustausch mit der Umgebung (aufgrund des Antriebs des Aufhängepunktes) aufrechterhalten werden Ein Phasenübergang ist daher in diesem Fall nicht nur mit einer Symmetriebrechung verbunden (siehe unten), sondern auch mit einer Ernüchterung des Systems aus dem thermodynamischen Gleichgewicht. Die jeweilige Gleichgewichtslage θ_0 des Pendels kann durch Berechnung der Minima des effektiven Potentials (6b) bestimmt werden. Demnach verhält sich das Pendel solange normal, d.h. das Minimum liegt bei $\theta_0 = 0$, wie die Frequenz unterhalb eines durch die übrigen Systemparameter festgelegten Werts bleibt:

$$\omega^2 < \frac{2Lg}{A^2}. \quad (7)$$

Oberhalb dieses Wertes besitzt das Pendel eine durch

$$\omega^2 = -\frac{4gL \sin \theta_0}{A^2 \sin 2(\theta_0 - \alpha)}$$

gegebene Gleichgewichtslage $\theta_0 = 0$. Wenn es diese einnimmt (s.u.), befindet es sich im geordneten (invertierten) Zustand. Dazwischen liegt der sogenannte kritische Punkt

$$\omega_c^2 = \frac{2Lg}{A^2}, \quad (9)$$

bei dem die Symmetriebrechung und damit der Phasenübergang erfolgt. Um zu konkreten Aussagen zukommen, betrachten wir im folgenden einige Spezialfälle die durch die Festlegung der Schwingungsebene für den Antrieb gegeben sind.

Horizontaler Antrieb

Für den horizontalen Antrieb $\alpha = 90^\circ$ nimmt das effektive Potential (6b) die Form

$$U_{90}(\theta, \omega^2) = \frac{A}{4L} \omega^2 \cos^2 \theta - g \cos \theta \quad (10)$$

an. Wächst ω^2 über den kritischen Wert ω_c^2 hinaus, so geht die Gleichgewichtslage von $\theta_0 = 0$ in einen durch

$$\omega^2 = \frac{\omega_c^2}{\cos \theta_0} \quad (11)$$

festgelegten Wert und damit das Pendel vom ungeordneten normalen in den geordneten invertierten Zustand über. Dieser „Phasenübergang“ läßt sich anhand von Abbildung 2 verfolgen, in der $U_{90} = 1/g U_{90}$ als Funktion der Auslenkung θ für wachsende ω^2 aufgetragen wurde.

Für $\omega^2 = 0$ weist das Potential U bzw. \tilde{U} ein absolutes Minimum bei $\theta = 0^\circ$ auf, das mit zunehmendem ω^2 flacher wird. Oberhalb des kritischen Punktes $\omega > \omega_c^2$ wächst in der Mitte des Minimums ein Maximum heraus, das zwei neu entstehende Minima voneinander trennt. Dadurch wird die Symmetrie gebrochen. Zwar sind beide Gleichgewichtslagen, die durch die Minima festgelegt werden, gleichberechtigt. Aber nur eine von beiden kann aktuell vom Pendel eingenommen werden. Es liegt eine echte Bifurkation vor: Das Pendel muß sich sozusagen für eine Gleichgewichtslage entscheiden. Mit anderen Worten: Es hängt vom Zufall ab, welche Gleichgewichtslage jeweils verwirklicht wird. In der Nähe von ω_c^2 reichen noch kleine Störungen aus, um das Pendel von einer in die andere Gleichgewichtslage springen zu lassen. Mit zunehmender Entfernung vom kritischen Punkt $\omega > \omega_c^2$ wird das Maximum bei $\theta = 0$ schließlich so groß, daß die einmal gewonnene Gleichgewichtslage stabilisiert und der Zu-

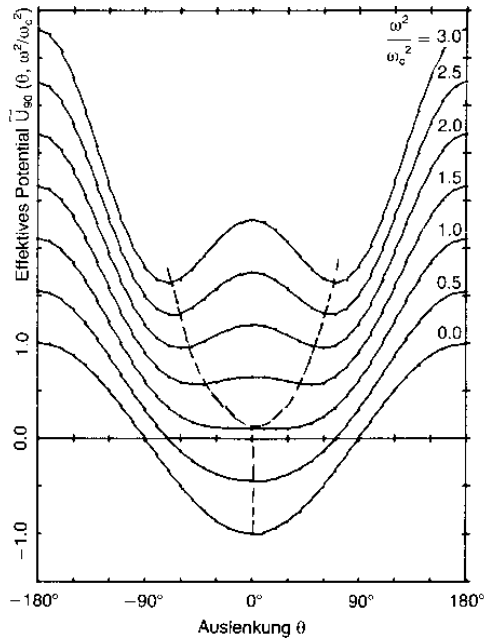


Abb. 2: Effektives Potential $\tilde{U}_{90}(\theta, \omega^2/\omega_c^2)$ als Funktion des Auslenkungswinkel θ für verschiedene Parameter ω^2/ω_c^2 . Der Übersichtlichkeit halber wurden die Kurven mit wachsendem ω^2/ω_c^2 jeweils um 0.3 nach oben verschoben, ohne daß die dazugehörige neue θ -Achse eingezeichnet wurde. Verbindet man die Minima (gestrichelte Kurve), so erhält die durch Gleichung (11) gegebene Kurve, deren positiver Ast in Abbildung 3 dargestellt ist. Hier, wie in den folgenden Abbildungen, wurden dimensionslose Größen statt U also $\tilde{U} = 1/g U$ benutzt.

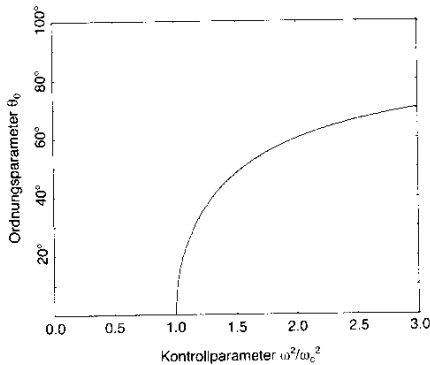


Abb. 3: Der als Ordnungsparameter fungierende Gleichgewichtswinkel θ als Funktion des Kontrollparameters ω^2/ω_c^2 . Es wurde nur der positive Ast aufgetragen. Die Ähnlichkeit zur bekannten Kurve der Magnetisierung als Funktion der absoluten Temperatur beim Ferronagneten ist auffallend.

fall sozusagen konserviert wird. Mit wachsendem ω^2 streben die beiden Minima zunehmend auseinander, um mit $\omega^2 \rightarrow \infty$ die Grenzwerte $\pm 90^\circ$ ein-

zunehmen. Dieses Verhalten läßt sich auch direkt der GL. (11) entnehmen. In Abbildung 3 ist das Verhalten des Gleichgewichtswinkels in Abhängigkeit von ω^2 noch einmal gesondert aufgetragen worden.

Vertikaler Antrieb

Nach demselben Schema wie beim horizontalen Antrieb läßt sich der vertikale Antrieb untersuchen. Als effektives Potential ergibt sich

$$U_0(\theta, \omega^2) = \frac{A^2}{4L} \omega^2 \sin^2 \theta - g \cos \theta \quad (12)$$

Läßt man ω^2 über den kritischen Punkt ω_c^2 hinaus wachsen, so wird wiederum die Symmetrie gebrochen. Es besteht jedoch ein qualitativer Unterschied zum Spezialfall des horizontalen Antriebs. Dazu schauen wir uns den Potentialverlauf von $\tilde{U}_0 = 1/g \tilde{U}$ als Funktion des Auslenkungswinkels θ für wachsendes ω^2 an (Abb. 4). Das Minimum bei $\theta = 0$ bleibt bestehen, die Flanken werden eher noch steiler. Denn oberhalb von ω_c^2 entsteht bei $\theta = 180^\circ$ zusätzlich ein lokales Minimum. Dieses ist vorn Minimum bei $\theta = 0^\circ$ durch ein durch $\cos \theta_0 = -\omega^2/\omega_c^2$ festgelegtes Maximum getrennt, dessen Lage bezüglich θ mit $\omega^2 \rightarrow \infty$ gegen $\pm 90^\circ$ strebt. Das heißt aber, daß ein Pendel, das um den Gleichgewichtszustand $\theta_0 = 0^\circ$ schwingt, auch bei Überschreiten des kritischen Punktes ω_c^2 nicht ohne weiteres in ein davon verschiedenes $\theta \neq 0$ übergeht. Es findet also nicht automatisch ein Phasenübergang statt. Erst wenn man das Pendel stark stört - indem man es veranlaßt, das Maximum zu überschreiten - „fällt“ es in das neue Minimum, und das System nimmt den geordneten Zustand ein.

Eine hierzu analoge Situation liegt beim inflationären Universum vor. Das höherliegende Minimum von u entspricht dem „falschen Vakuum“, das absolute Minimum dem „wahren Vakuum“. (Diesen Hinweis verdanken wir Prof. Dr. J. Ehlers (als Gutachter))

Kritischer Exponent

Es ist üblich, das Verhalten eines Vielteilchensystems in der Nähe des kritischen Punktes durch den sog. *kritischen Exponenten* zu charakterisieren [8]. Im vorliegenden Fall gewinnt man ihn dadurch, daß man beispielsweise für den Fall $\alpha = 90^\circ$ die Gleichung (11) durch Reihenentwicklung des Kosinus nach θ_0 auflösen kann, wenn man ω^2 durch einen nur wenig von ω_c^2 abweichenden

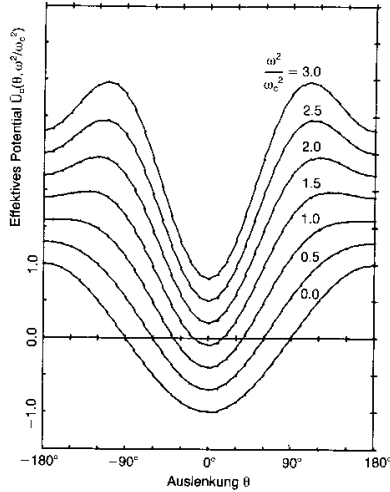


Abb. 4: Effektives Potential $\tilde{U}_0(\theta, \omega^2/\omega_c^2)$ als Funktion des Auslenkungswinkels θ für verschiedene Parameter ω^2/ω_c^2 . Der Übersichtlichkeit halber wurden die Kurven mit wachsendem ω^2/ω_c^2 jeweils um 0.3 nach oben verschoben.

Wert $\varepsilon = (\omega^2 - \omega_c^2)/\omega_c^2$ ersetzt. Man erhält auf diese Weise

$$\theta_0 \sim \varepsilon^{1/2} \quad (13)$$

Der kritische Exponent beträgt also $1/2$ und ist damit übrigens identisch mit dem kritischen Exponenten eines Ferromagneten, wie er sich im Rahmen der Weißschen Molekularfeldtheorie [8] ergibt.

Analogie zum diskontinuierlichen Phasenübergang

Entscheidend für das Invertierte Verhalten des Pendels ist, daß es durch den periodischen Antrieb des Pendels bedingte Kraft nach Gleichung (6) im Mittel die Schwerkraft überwiegt und ihr entgegengerichtet ist. Ein Übergang vom normalen bzw. ungeordneten Zustand müßte demnach auch dann zu erreichen sein, wenn es gelänge, statt an der Frequenz an der Schwerkraft zu „drehen“. Praktisch läßt sich eine Variation der Schwerebeschleunigung dadurch simulieren, daß man das Pendel um die horizontale x-Achse dreht. Bei einer Drehung um einen Drehwinkel γ kommt nämlich nur eine Schwerebeschleunigung von $\tilde{g} = g \cos \gamma$ zur Wirkung. Eine Vollandrehung kommt damit einer Variation von $\tilde{g} \rightarrow 0 \rightarrow -\tilde{g} \rightarrow 0 \rightarrow \tilde{g}$ gleich, ohne daß (im Idealfall) dadurch andere Größen beeinflusst werden.

Wir haben bereits oben (Gleichung (9)) gesehen, daß normales und invertiertes Verhalten des Pen-

dels vom Verhältnis von ω^2 zu einer von g abhängigen Größe $\omega_c^2 = 2Lg/A^2$ abhängen. Wird jetzt statt ω^2 jedoch g variiert, so erreicht man nur dann ein phasenübergangsähnliches Verhalten, wenn (bei $\gamma = 0$) vom ungeordneten Zustand $\omega_c^2 < 2L/A^2$ ausgegangen wird. Denn \tilde{g} kann durch die Drehung nur verkleinert werden. Die tatsächlich wirkende Schwerebeschleunigungskomponente nimmt jetzt die Rolle des Kontrollparameters ein.

Schräger Antrieb

Dieser Übergang soll an dem Spezialfall $\alpha = 45^\circ$ etwas näher betrachtet werden. Das effektive Potential nimmt nun die Form

$$\tilde{U}_{45}(\theta, G) = \frac{\omega^2}{4\omega_c^2} (1 - \sin 2\theta) - G \cos \theta \quad (14)$$

an, so daß die Gleichgewichtslage durch

$$G = \frac{\omega^2 \cos 2\theta}{2\omega_c^2 \sin \theta} \quad (15)$$

festgelegt ist. Dabei übernimmt nunmehr $G = \tilde{g}/g$ die Rolle des früheren Kontrollparameters ω^2 . Variiert man nämlich G , so tritt plötzlich zusätzlich zum bereits vorhandenen Minimum ein weiteres Minimum auf, und zwar bei $\theta = 90^\circ$ wenn G den Wert $G_c = -\omega^2/2\omega_c^2$ überschreitet bzw. bei $\theta = 90^\circ$, wenn G den Wert $G_c = \omega^2/2\omega_c^2$ unterschreitet. Beim Durchlaufen der Werte von G in umgekehrter Richtung verschwindet dieses Minimum in entsprechender Weise.

Damit hat man ein qualitativ anderes Verhalten als beim kontinuierlichen Phasenübergang, bei dem die beiden Minima gleichzeitig beim kritischen Punkt aus einem Minimum kontinuierlich herauswachsen bzw. wieder darin aufgehen

Dieser Unterschied läßt sich durch Vergleich von Abbildung 2 und Abbildung 5 veranschaulichen.

Im vorliegenden Fall (Abb. 5) gehen wir vom ungeordneten Zustand $\omega^2 = 0,9\omega_c^2$ aus. Verringert man G von 1 beginnend, so verschiebt sich das Minimum von $\theta = 0$ leicht hin zu größeren Winkeln und wird immer flacher. Gleichzeitig deformiert sich die linke Flanke, um schließlich ab $G_c = 0,45$ an der Stelle $\theta = 90^\circ$ ein neues Minimum entstehen zu lassen. Dieses Minimum kann jedoch von großen Störungen abgesehen zunächst vom Pendel nicht eingenommen werden. Verkleinert man θ in den negativen Bereich hinein, so verschwindet bei dem kritischen Wert $G_c = 0,45$ die vom Pendel eingenommene Gleichgewichtslage

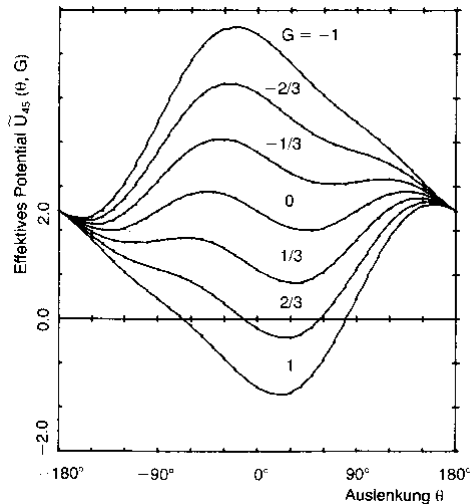


Abb. 5: Effektives Potential $\tilde{U}_{45}(\theta, G)$ als Funktion des Auslenkungswinkels θ für verschiedene Parameter G . Der Übersichtlichkeit halber wurden die Kurven mit abnehmendem θ jeweils um $1/3$ nach oben verschoben

plötzlich ganz, und dem Pendel bleibt nichts anderes übrig, als augenblicklich, also sprunghaft, in die inzwischen gut ausgebildete andere Gleichgewichtslage überzuwechseln. Durchläuft man anschließend den Wertebereich von G in umgekehrter Richtung. So verschwindet auch dieses Minimum wieder mit der Folge, daß das Pendel in die alte Gleichgewichtslage zurückspringt. Dies passiert jedoch zu einem „späteren“ Zeitpunkt, also bei größerem Wert von G als beim zuerst geschilderten Übergang. Man hat es also im Grunde mit zwei Phasenübergangspunkten $G = \pm G_c$ zu tun. Dieses sogenannte Hysterisverhalten ist charakteristisch für einen diskontinuierlichen Phasenübergang (1. Art).

In Abbildung 6 haben wir den als Ordnungsparameter fungierenden Gleichgewichtswinkel θ_0 in Abhängigkeit vom Kontrollparameter G aufgetragen. Die soeben anhand von Abbildung 5 beschriebene Beobachtung, daß das Pendel auf je zwei verschiedenen Wegen von der einen in die andere Gleichgewichtslage gelangt, je nachdem, aus welcher Richtung man den kritischen Punkt überschreitet, findet hier ihren anschaulichen Ausdruck. Auch die Diskontinuität, das sprunghafte Verhalten des Ordnungsparameters θ_0 ist unmittelbar der Abbildung 6 zu entnehmen.

Potentiale und Responsefunktionen

Um die Analogie zwischen dem „kritischen“ Verhalten des invertierten Pendels und kontinuierlichen und diskontinuierlichen Phasenübergängen in Vielteilchensystemen weiter verfolgen zu kön-

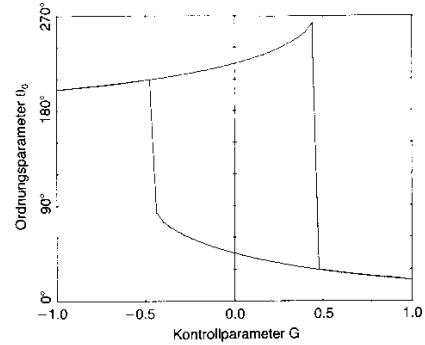


Abb. 6: Der als Ordnungsparameter fungierende Gleichgewichtswinkel θ_0 als Funktion des Kontrollparameters G . Deutlich zu erkennen die diskontinuierlichen Phasenübergänge bei $G_c = \pm 0,45$.

nen, betrachten wir die für das knirsche Verhalten charakteristischen Funktionen. Dies sind normalerweise die Freie Enthalpie und ihre Ableitung nach dem Kontrollparameter. Der Freien Enthalpie entspricht im Falle unseres Pendels das effektive Potential. In Abbildung 7a haben wir das Potential $\tilde{U}_{90} = 1/g U_{90}$ (Gl. 10) als Beispiel für einen kontinuierlichen und das Potential $\tilde{U}_{45} = 1/g U_{45}$ (Gl. 14) als Beispiel für einen diskontinuierlichen Phasenübergang als Funktion des jeweiligen Ordnungsparameters aufgetragen. Der Unterschied zwischen den beiden Arten des Phasenübergangs zeigt sich darin, daß im diskontinuierlichen Fall bei G_c ein Sprung auftritt.

Die Entropie (bzw. genauer: die Entropiedichte) spielt bei Phasenübergängen eine wichtige Rolle. Je nachdem, ob sie sich kontinuierlich oder diskontinuierlich ändert, hat man es mit einem kontinuierlichen Phasenübergang oder diskontinuierlichen Phasenübergang zu tun. Man erhält die Entropie formal durch Ableitung der Freien Enthalpie nach der absoluten Temperatur als Kontrollparameter. Analog dazu hat man beim Pendel $U_{90}(\theta_0, \omega^2)$ bzw. $U_{45}(\theta_0, \omega^2)$ nach θ_0 bzw. G abzuleiten. Wir betrachten hier exemplarisch zunächst den Fall horizontaler Anregung ($\alpha = 90^\circ$). Für diesen ergibt sich eine Funktion, $S_{90}(\theta_0, \omega^2)$, deren Verhalten am kritischen Punkt durch

$$S_{90}^{\uparrow} := - \left. \frac{\partial U}{\partial \omega^2} \right|_{\theta_0=0}^{\uparrow} = - \frac{g}{2\omega_c^2}, \quad (16)$$

$$S_{90}^{\downarrow} := - \left. \frac{\partial U}{\partial \omega^2} \right|_{\theta_0 \neq 0 \rightarrow 0}^{\downarrow} = - \frac{g\omega_c^2}{2\omega^4}$$

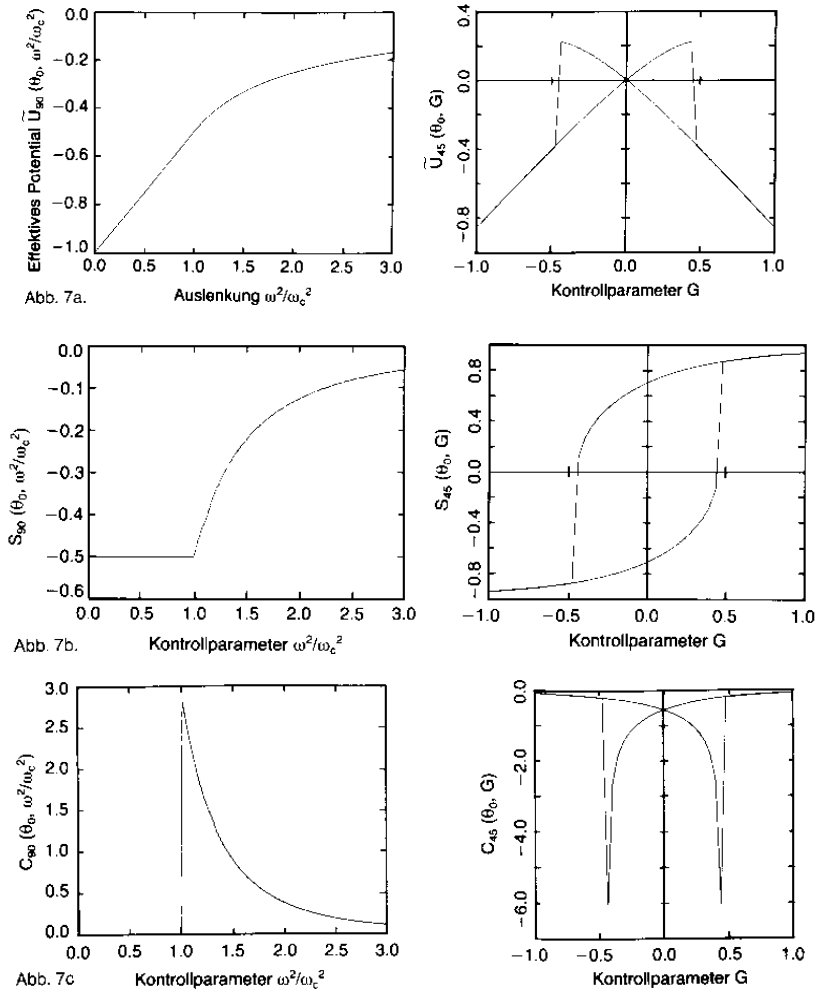


Abb. 7: Gegenüberstellung der effektiven Potentiale und einiger Responsefunktionen für den kontinuierlichen ($\alpha = 90^\circ$) und diskontinuierlichen ($\alpha = 45^\circ$) Phasenübergang als Funktion des jeweiligen Kontrollparameters.

gegeben ist, je nachdem, ob man für sich von „unten“ \uparrow oder „oben“ \downarrow (θ_0 durch Gl. (11) gegeben) an den kritischen Punkt annähert. Man erhält auf diese Weise eine Funktion mit sehr steiler Tangente am kritischen Punkt (Abb. 7b). Vergleicht man damit die entsprechende Größe $S_{45}(\theta_0, G)$ für den diskontinuierlichen Spezialfall ($\alpha = 45^\circ$) so erhält man an der entsprechenden Stelle einen Sprung, wie man aufgrund des Sprungs im effektiven Potential auch erwarten mußte.

Zum Schluß sei, noch gezeigt, daß auch die zweite Ableitung der Freien Enthalpie, die spezifische Wärme, bei unserem Pendel eine Entsprechung findet. Sie ist durch die zweite Ableitung des Potentials gegeben, beider jetzt auch im kontinuierlichen Fall am kritischen Punkt ein Sprung auftritt (Abb. 7c), weshalb man auch von Phasenübergängen 2. Art spricht.

Man erhält:

$$C_{90}^{\uparrow} := - \left. \frac{\partial S_{90}}{\partial \omega^2} \right|_{\theta_0=0}^{\uparrow} = 0, \tag{17}$$

$$C_{90}^{\downarrow} := - \left. \frac{\partial S_{90}}{\partial \omega^2} \right|_{\theta_0 \neq 0 \rightarrow 0}^{\downarrow} = \frac{3\omega_c^2}{\omega^6}.$$

Dabei sind die Symbole entsprechend Gleichung (16) zu interpretieren.

Freihandversuche

Die hier diskutierte Analogie zwischen dem kritischen Verhalten des invertierten Pendels und Phasenübergängen wäre von rein akademischem Wert, wenn es nicht einfache Möglichkeiten gäbe, sich dieses Verhalten an einem konkreten Model

anzuschauen und selbst zu erleben. Die einfachste Möglichkeit - nur diese soll hier kurz skizziert werden - besteht darin, einen elektrischen Rasierapparat mit Schwinganker als Antriebsaggregat zu benutzen. Man nimmt den Scherkopf durch Lösen eines Sprenglings ab, schiebt einen mit einer passenden Bohrung versehenen Pendelstab (aus Plastik, Pappe oder Blech) über den Zapfen und arretiert ihn durch erneutes Anbringen des Sprenglings. Jetzt gibt man durch Drehen des Rasierers die gewünschte Schwingrichtung vor und schaltet das Gerät ein. Ob das Pendel invertiert wird oder nicht hängt - wie wir gesehen haben - maßgeblich davon ab, wie sich die Antriebsfrequenz zu $\omega_c^2 = 2Lg/A^2$, eine aus effektiver Pendellänge, Erdbeschleunigung und Antriebsamplitude zusammengesetzten Größe verhält. Da bis auf L , das bei gegebenem Material von der Größe des Pendelstabs abhängt, alles andere vorgegeben ist (die Antriebsfrequenz $\nu = \omega/2\pi$ beträgt 50 Hz, die Amplitude etwa 2 mm), kann man durch die Größe des Pendels festlegen, ob die Frequenz ausreicht, die geordnete Phase einzunehmen. Für ein 1 cm breites Pappende wird das bis zu einer Länge von 10cm stets der Fall sein, wenn man nicht z.B. durch Plastilin den Schwerpunkt des Pendels gezielt verschiebt.

Ist also $\omega^2 > \omega_c^2$, so wird man beispielsweise bei horizontalem Antrieb beobachten, daß sofort nach Einschalten des Geräts die Symmetrie gebrochen wird. Das Pendel schwingt nun um eine neue Gleichgewichtslage links oder rechts von der alten und nimmt auf diese Weise den geordneten Zustand ein. Je kürzer das Pendel, desto näher reicht diese an $\theta_0 = 90^\circ$ heran. Davon, daß es von zufälligen Störungen abhängt, ob das Pendel nach links oder rechts geht, kann man sich überzeugen, indem man das Gerät häufiger anschaltet. Dabei stellt man außerdem etwa gleiche Wahrscheinlichkeit für den Übergang nach links und rechts fest, was deutlich macht, daß die Minima des effektiven Potentials gleich tief liegen. Bei vertikal orientiertem Antrieb bleibt das Pendel in der Ruhelage $\theta_0 = 0^\circ$. Es sei denn, man hält es beim Einschalten des Antriebs in der Kopfstandposition ($\theta_0 = 180^\circ$). Dann schwingt es um $\theta_0 = 180^\circ$ (Stehpendel) und leistet umso stärkeren Widerstand gegen ein Herausdrehen aus dieser Position je kürzer es ist, d.h. je stärker ω^2 die Größe ω_c^2 übertrifft.

Auch der diskontinuierliche Phasenübergang läßt sich mit diesem einfachen Gerät simulieren. Dazu fertigt man sich ein Pendel an, bei dem ω^2 leicht unterhalb ω_c^2 liegt, d.h. von kleinen Schwankungen abgesehen das Pendel noch in der Ruhelage $\theta_0 = 0^\circ$ verbleibt. Läßt man jetzt den Antrieb in

einem Winkel von etwa $\alpha = 45^\circ$ wirken und dreht dabei den Rasierer um die horizontale x-Achse, so daß die Pendelebene langsam aus der Vertikalen in die Horizontale überführt wird, dann erzielt man einen Effekt, der der Verminderung der Erdbeschleunigung äquivalent ist. Damit nimmt man aber Einfluß auf ω_c^2 und erreicht, daß dieses das vorgegebene ω^2 unterschreitet und die Bedingungen für einen Übergang in die geordnete Phase vorliegen. Davor kann man sich überzeugen, wenn man etwas mit der Hand nachhilft und das Pendel auf diese Weise in eine neue Gleichgewichtslage $\theta \neq 0$ befördert. Von selbst erfolgt dieser Übergang sehr viel später, aber dann sprunghaft. Man muß den Rasierer über 90° , also über den Wert $G = 0$ hinaus zu negativem Wert von G drehen bis dieser „Phasensprung“ erfolgt. Dreht man den Rasierer zurück, so fällt umgekehrt das Pendel nicht etwa an derselben Stelle in den ursprünglichen ungeordneten Zustand zurück, sondern erst später, wenn man sich bereits bei Werten von G befindet, bei denen das Pendel vorher noch keine Anstalten machte zu invertieren. Man bekommt auf diese Weise einen recht anschaulichen, ja mit eigenen Händen erfühlbaren, Eindruck vom Hysterese-Verhalten, welches für den diskontinuierlichen Phasenübergang typisch ist.

Mit diesen Andeutungen zu Freihandversuchen, mit denen man die oben entwickelten theoretischen Vorstellungen zum phasenübergangsähnlichen Verhalten des Pendels qualitativ überprüfen und veranschaulichen kann, wollen wir es bewenden lassen. Weitere Experimente liegen auf der Hand. Zu einer Präzisierung der experimentellen Untersuchung kann man durch Verbesserung des Geräts, insbesondere der Aufhängung des Pendels, gelangen. Ersetzt man schließlich den Rasierer beispielsweise durch eine elektronisch regelbare Sticksäge, so verfügt man sogar über die Möglichkeit einer kontinuierlichen Variation der Antriebsfrequenz. Dadurch ist natürlich wenn auch mit etwas größerem Aufwand eine sehr viel direktere und gegebenenfalls über das rein Qualitative hinausgehende Überprüfung der theoretischen Ergebnisse gegeben.

Schlußbemerkung

Das invertierte Pendel ist ein einfaches mechanisches System, welches ein kritisches Verhalten aufweist, das den Phasenübergängen in Vielteilchensystemen analog ist. Im Unterschied zu anderen mechanischen Beispielen, z.B. dem „Vogel im Ei“ [13,14], kann man am invertierten Pendel sowohl Phasenübergänge 1. Art als auch 2. Art studieren. Interessant und faszinierend wird dieses System vor allem dadurch, daß es für qualitative

Belange einfach realisiert werden kann und somit die Möglichkeit bietet, Phasenübergängen auch einen sinnlichen Erfahrungsaspekt abzugewinnen: Wenn man den Rasierer in den Händen hält, spürt man beispielsweise, wie die Schwingungsmoden weich werden und den Phasenübergang einleiten. Dies kann für das Verständnis von Phänomenen wichtig sein, die in anderen Bereichen häufig nur über komplizierte und abstrakte Überlegungen zugänglich sind

(Anschrift der Verfasser: Priv. Doz. Dr. H Joachim Schlichting, Dr. Bernd Rodewald, FB Physik der Universität, Barbarastr. 7, 4500 Osnabrück)

Literatur

[1] Kapitza, P.L. In: Tor Haar (ed.): Collected Papers of P.L. Kapitza, Vol. 2, London: Pergamon 1965, S. 714-726

siehe auch: Landau, L. D., Lifschitz, E. M. Lehrbuch der theoretischen Physik Bd.I, Berlin: Akademie-Verlag 1967, S. 107ff.

[2] King, R. E.: The inverted pendulum. In: Am. J. Phys. 33, 855 (1965)

[3] Blitzer, L.: Inverted Pendulum, In: Am. J. Phys. 33, 1076 (1965)

[4] Phelbs, F. M., Hunter, J. H.: An Analytical Solution of the Inverted Pendulum, In: Am. J. Phys. 33, 285 (1965)

[5] Kalmus, H. P.: The Inverted Pendulum, In: Am. J. Phys. 38, 874 (1970)

[6] Yorke, E. D.: Square-wave model for a pendulum with oscillating Suspension, In: Am. J. Phys. 46, 285 (1978)

[7] Ness, D. J.: Small Oscillations of a Stabilized, Inverted Pendulum, In: Am. J. Phys. 35, 964 (1967)

[8] Stanley, H. E.: Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena: Oxford; Clarendon Press 1971

[9] Stierstadt, K.: Phasenumwandlungen I und II, In: Phys. Bl. 30/1, 3, 9, 106 (1974)

[10] Stierstadt, K.: Phasenübergänge in Physik und Biologie 1 und II, In: Phys. Bl. 37, 7, 8, 315, 358 (1978)

[11] Prigogine, I., Stengers, I.: Dialog mit der Natur: München: Piper 1983, 5152

[12] Haken H.: Synergetik. Berlin etc.: Springer 1983

[13] Rodewald, B., Schlichting, H. J.: Ein Spielzeug zur Veranschaulichung von Katastrophen in Ökosystemen. In: NiU-P/C 33/8, 294 (1984)

[14] Rodewald, B., Schlichting, H. J.: A catastrophic toy. In: Am. J. Phys. 53/12, 1172 (1985)