

Thermodynamik und Strukturbildung am Beispiel der Entstehung eines Flussnetzwerkes

Herrn Prof. Dr. Helmut Schmidt, Köln, zum 60. Geburtstag gewidmet

Mit allgemeinen thermodynamischen Argumenten wird versucht, eine Antwort auf die Frage zu geben, warum Flussnetzwerke (wie sie z. B. bei der natürlichen Entwässerung von Flächen entstehen) jene typischen verästelten, fraktalen Muster ausbilden. Ausschlaggebend für derartige Strukturbildungsprozesse ist, dass die Energiedissipationsrate des fließenden Wassers minimal wird. Diese Aussage wird in einem einfachen Algorithmus zur Simulation von Flussnetzwerken umgesetzt.

1 Einführung

Der derzeitige Physikunterricht befasst sich zum überwiegenden Teil mit Inhalten, Methoden und Denkweisen der klassischen Physik. Die Physik des 20. Jahrhunderts findet vergleichsweise wenig Beachtung. Damit läuft der Physikunterricht Gefahr, unzeitgemäß und seinem Bildungsauftrag nicht mehr gerecht zu werden. Hinzu kommt, dass ein Unterricht, der die Behandlung der oft faszinierenden und spektakulären Erkenntnisse der modernen Physik den Massenmedien und der populärwissenschaftlichen Literatur überlässt, seine eigene Zuständigkeit aufgibt und bei den Lernenden allenfalls als Sachwalter der Geschichte der Physik angesehen wird.

Ein wesentliches Argument, das insbesondere seitens der Lehrenden gegen eine weitere Öffnung des Physikunterrichts für die moderne Physik hervorgebracht wird, beruht auf der Unanschaulichkeit, dem Mangel an schuladäquaten Experimenten und der Theorielastigkeit der Inhalte. Ganz abgesehen davon, dass diese Einschätzung möglicherweise aus einer überkommenen Perspektive des Physikunterrichts erfolgt, die den veränderten Bedingungen in einer sich rasant ändernden Welt nicht mehr angemessen ist, wird übersehen, dass sich die moderne Physik oft in ziemlich handfesten technologischen Errungenschaften manifestiert, die einen unmittelbaren Bezug zum Alltagsleben der Menschen haben. Man denke beispielsweise an die Computer- und Kommunikationstechnologien.

Hinzu kommt, dass die moderne Physik sich nicht nur in neuen Gegenstandsbereichen (wie z. B. die Welt der Quanten) manifestiert, sondern oft auch durch neue Blicke auf die alten Gegenstände umschrieben werden kann. Die nichtlineare Physik und die Nichtgleichge-

wichtstthermodynamik etwa befassen sich vielfach mit demselben Gegenstandsbereich der klassischen Physik, richten das Interesse aber auf andere Fragestellungen. Indem die Bedeutung der Selbstorganisation von Systemen, der Strukturbildung und Evolution auch aus der Perspektive der Physik erkannt worden ist, können sich die physikalischen Untersuchungen nicht länger auf lineare Zusammenhänge und thermodynamische Gleichgewichtszustände beschränken. Das Verhalten nichtlinearer Systeme außerhalb des thermodynamischen Gleichgewichts rücken in den Blickpunkt der aktuellen Forschung.

Auch unter diesen neuen Fragestellungen bleibt die Physik an grundlegenden Gesetzmäßigkeiten interessiert und macht ihre Untersuchungsgegenstände so einfach wie möglich, aber – so muss man mit EINSTEIN hinzufügen – nicht einfacher. Um ein bekanntes Beispiel zu nennen: Der Meteorologe EDWARD LORENZ vereinfachte sein Gleichungssystem zur Beschreibung des Wetters so stark, dass es unter keinen Umständen zur tatsächlichen Wettervorhersage tauglich ist. Es bleibt aber trotz der extremen Einfachheit plausibel. LORENZ' künstlicher Wetterbericht ähnelt stark dem natürlichen. Dadurch gelingt die Einsicht, dass der Beruf des Meteorologen in der extrem vereinfachten künstlichen Welt nicht einfacher ist als in der Wirklichkeit: Das Wetter spielt hier wie dort verrückt und entzieht sich jeglicher längerfristigen Vorhersage. Wesentlicher als die Berücksichtigung möglichst vieler Parameter ist die Berücksichtigung der Nichtlinearität der Dynamik. In dem Bemühen, auch unter nichtlinearen Bedingungen und außerhalb des thermodynamischen Gleichgewichts möglichst einfache Systeme zu untersuchen, befasst sich die aktuelle Forschung beispielsweise mit dem Verhalten von Sand und anderen Granulaten. Diese Substanzen sind zwar in der Schlichtheit der Wechselwirkung ihrer Teilchen kaum zu unterbieten, zeigen aber in mehrfacher Hinsicht ein überraschend komplexes Verhalten (vgl. z. B. [1]).

2 Dissipative Strukturen mit fraktalen Grenzen

Für die Schulphysik besonders interessant sind Nichtgleichgewichtsstrukturen, die sich mithilfe der Dissi-

pation von Energie aus dem thermodynamischen Gleichgewicht heraus entwickeln. Wenn man beispielsweise Sand oder andere Granulat in geeigneter Weise schüttelt, können dynamische Muster entstehen und aufrechterhalten werden, die ihren stationären Nichtgleichgewichtszustand durch nichtlineare Mechanismen gegen äußere Störungen zu stabilisieren vermögen [1].

Strukturen fallen durch eine charakteristische äußere Form auf. Die Form kann als visueller Ausdruck der inneren Dynamik angesehen werden, mit der sich das System aus der nivellierenden Umgebung ausgrenzt. In vielen Fällen bilden sich Grenzen zwischen System und Umgebung, die in einem sehr konkreten Sinne optimal sind [2]. Dazu zählen die erst vor einigen Jahrzehnten entdeckten Fraktale. Diese Fraktale spielen in der belebten und unbelebten Natur eine wichtige Rolle (siehe z. B. [3, 4]). Als Beispiel einer Struktur mit fraktalen Grenzen, die sich unter gegebenen Bedingungen aus dem thermodynamischen Gleichgewicht heraus entwickelt und einem optimalen Zustand zu strebt, betrachten wir im Folgenden die Entstehung des Netzwerkes eines Flusses.

3 Fraktale Flussnetzwerke

Wenn nach einem Regenguss oder bei Ebbe im Watt Wasser zur tiefsten Stelle fließt, entstehen fraktal verzweigte hierarchisch geordnete Systeme, die in ihrer Form an Adern, Bäume, Wurzelwerk oder Netzwerke von Flüssen erinnern (Abb. 1 und 2). Die Ähnlichkeit in der Struktur lässt auf eine globale Ähnlichkeit der Funktion schließen. Wie kommt es zur Ausbildung derartiger Muster?

Angesichts der Komplexität der fein verästelten Netzwerke erscheint eine Antwort auf diese Frage – zumal mit Mitteln der Schulphysik – zunächst aussichtslos. Mit Hilfe einfacher thermodynamischer Argumente lässt sich die Entstehung und Aufrechterhaltung solcher Strukturen zumindest global plausibel machen, ohne dass die Kenntnis von individuellen Mechanismen, wie im vorliegenden Fall etwa hydrodynamische und geologische Besonderheiten erforderlich ist. Dazu betrachten wir als System eine ebene Fläche, die an einer bestimmten Stelle (z. B. an einer Ecke oder in der Mitte) einen Abfluss besitzt und gleichmäßig mit Wasser bereignet wird. Erfahrungsgemäß tendiert das Wasser dazu, zur tiefsten Stelle zu fließen, um das System ins thermodynamische Gleichgewicht zu bringen. Im stationären Zustand verlässt die Fläche pro Zeiteinheit genauso viel Wasser wie ihr zuströmt. Mit dem Wasser strömt auch Energie durch das System. Die im System vorhandene Wasser- und Energiemenge bleibt im stationären Gleichgewicht konstant. Die einzige zu beobachtende Veränderung ist die Dissipation der Energie durch Reibung mit dem Untergrund: Als hochwertige potenzielle Energie wird sie vom System aufgenommen und als Wärme bei Umgebungstemperatur an die Umgebung abgegeben. Die Größe des dissipierten Energiestroms, der das System durchsetzt, ist ein Maß dafür, wie weit das System vom thermodynamischen Gleichgewicht entfernt ist.

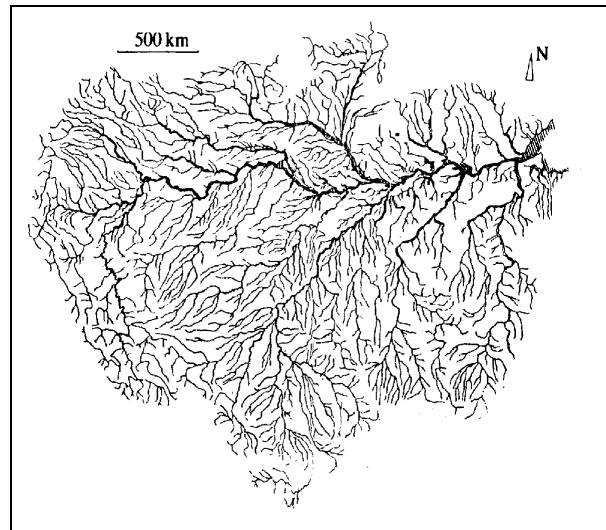


Abb. 1. Beispiel eines Real-Flussnetzwerkes: der Amazonas und seine Zuflüsse



Abb. 2. Entwässerungsnetzwerk, wie es typischerweise bei Ebbe im Watt entsteht

Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik tendiert jedes sich selbst überlassene System dazu, ins thermodynamische Gleichgewicht überzugehen. Dabei wird die Dissipationsrate zunehmend kleiner, bis sie ganz verschwindet und das System das thermodynamische Gleichgewicht erreicht hat. Ein offenes, von Materie und Energie durchströmtes System wie die beregnete Fläche kann das thermodynamische Gleichgewicht aber nicht erreichen: In dem Maße, wie es sich ihm durch den Abfluss von Wasser und der damit verbundenen Dissipation von Energie nähert, entfernt es sich von ihm durch Zufluss von Wasser und mechanischer Energie. Die Tendenz, das Gleichgewicht zu erreichen, führt in dieser Situation jedoch dazu, dass das System dem Gleichgewicht so nahe – wie unter den gegebenen Bedingungen möglich – kommt. Das ist der Fall, wenn die Dissipationsrate der Energie einem Minimum zustrebt. ILYA PRIGOGINE konnte diese plausible Erklärung wissenschaftlich untermauern, indem er zeigte, dass ein System (wie etwa die beregnete Ebene) einem stationären Fließgleichgewicht zustrebt, in dem die Energiedissipationsrate minimal ist (Prinzip von der minimalen Entropieproduktionsrate) [5].

4 Flussnetzwerke als ›optimale Fließgleichgewichte‹

Umgekehrt lässt sich dieses Minimalprinzip benutzen, um die Struktur zu ermitteln, die eine berechnete Ebene ausbilden wird, wenn es sich auf das stationäre Fließgleichgewicht zu entwickelt (vgl. [6–7]). Dazu erschaffen wir uns zunächst mithilfe eines Computerprogramms ein zufälliges Flussnetzwerk, wie es sich vielleicht zu Beginn ausbildet, wenn die ersten Tropfen gefallen sind und sich zu kleinsten Flussabschnitten zu vereinigen beginnen. Dann verfolgen wir, wie unter der Bedingung einer minimalen Energiedissipationsrate das Netzwerk sich auf eine Struktur hin entwickelt, die erstaunliche Ähnlichkeit mit realen natürlichen Flussnetzwerken aufweist. (vgl. Abb. 6 und 7).

4.1 Abschätzung der Dissipationsrate

Die dem Netzwerk durch die Berieselung zugeführte potenzielle Energie wird während des Abfließens in kinetische Energie umgewandelt und diese zum Teil (z. B. in Form von Reibung mit dem ›Flussbett‹) als Wärme an die Umgebung abgegeben. Im stationären Zustand wird die gesamte zugeführte Energie dissipiert. Wir setzen der Einfachheit halber die Energiedissipation als proportional zur potenziellen Energie E_{pot} an:

$$E_{\text{diss}} \sim E_{\text{pot}} \sim m \cdot h.$$

Es sei m_i die gesamte durch ein Kanalsegment i abfließende Wassermenge, l_i die entsprechende Länge des betrachteten Teilstückes und s_i sein Gefälle, dann folgt: $h_i \sim s_i \cdot l_i$. Betrachtet man nun die Energiedissipation $E_{\text{diss},i}$ in einem Teilkanal i des Netzwerkes, so ergibt sich

$$E_{\text{diss},i} \sim m_i \cdot s_i \cdot l_i.$$

Zur Abschätzung der Energiedissipationsrate benötigt man den Durchfluss bzw. die Durchflussrate, also die pro Zeiteinheit durch das Netzwerk bzw. seine Teilkanäle durchgeflossene Wassermenge. Der Fluss Q_i durch den Kanal i berechnet sich zu:

$$Q_i \sim \frac{m_i}{t}.$$

Für die Energiedissipationsrate $P_{\text{diss},i} = E_{\text{diss},i} / t$ auf einem der Segmente gilt dann:

$$P_{\text{diss},i} \sim Q_i \cdot s_i \cdot l_i.$$

Dieser Zusammenhang lässt sich noch etwas vereinfachen, da empirisch gezeigt werden konnte (vgl. [6–7]), dass zwischen dem Durchfluss und der Steigung eines Kanalsegmentes eine einfache Beziehung besteht:

$$s_i \sim Q_i^\alpha, \text{ mit } \alpha \approx -0,5.$$

Somit gilt:

$$P_{\text{diss},i} \sim Q_i^{0,5} \cdot l_i.$$

Werden die einzelnen Dissipationsterme über alle Teilstücke des Netzwerkes aufsummiert, so berechnet sich die Gesamt-Energiedissipationsrate P_{diss} zu

$$P_{\text{diss}} \sim \sum_{i=1}^n P_{\text{diss},i} \sim \sum_{i=1}^n Q_i^{0,5} \cdot l_i.$$

Diese Gleichung bietet eine einfache Abschätzung der Dissipationsrate nur aus der Kenntnis der einzelnen Durchflussmengen und Segmentlängen des untersuchten Netzwerkes.

4.2 Minimierung der Dissipationsrate – ein einfacher Algorithmus

Eine gegebene (Gitter-)Fläche wird berieselt und das gesamte Wasser durch Drainagekanäle – den einzelnen Segmenten des Flussnetzwerks – bis zu einem Abfluss abgeführt. Der Abfluss liegt entweder auf der Fläche (z. B. in der Mitte) oder am Rand der Ebene

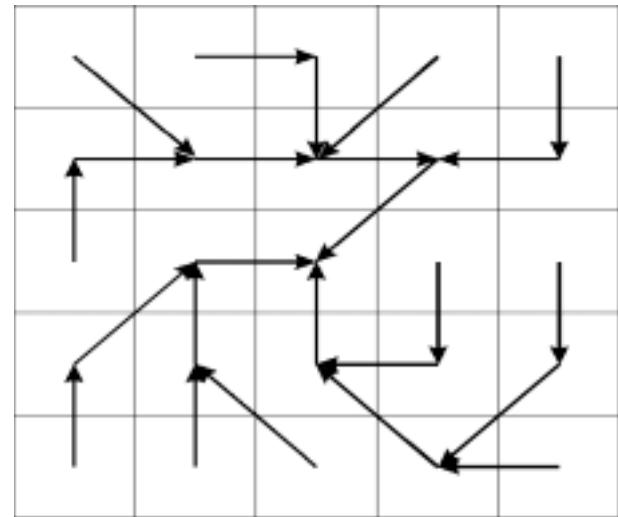


Abb. 3. Entwässerung eines Netzwerkes über die nächsten Nachbarn bis hin zum Mittelpunkt

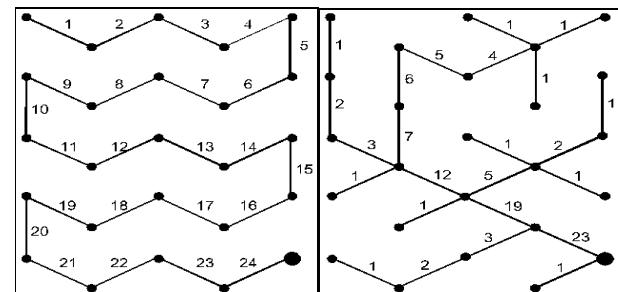


Abb. 4. Links: Mögliche Initialisierung eines 5x5-Netzwerkes (Dissipationsrate $\sim 80,63$). Rechts: Eine Iterationsstufe des Optimierungsprozesses (Dissipationsrate $\sim 42,89$). Abfluss am rechten unteren Rand, zusätzlich eingetragen ist der jeweilige Durchfluss.

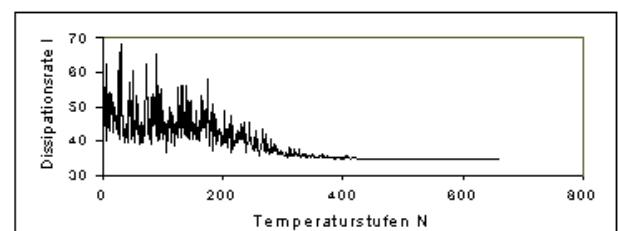


Abb. 5. Mögliche Schwankungsbreite und zeitliche Entwicklung der Dissipationsrate während einer Simulation

(z. B. in einer Ecke) und Wasserverluste durch Verdunsten oder Versickern werden ausgeschlossen. Weiterhin wird die Berieselung über die ganze Fläche als gleichmäßig verteilt und als konstant angesehen.

Unterteilt man das Gitter in n Flächenabschnitte und entwässert diese über Kanäle, wobei ihre jeweilige Fließrichtung einem Gefälle entspricht, so ergeben sich verschiedene Möglichkeiten, wie diese Kanalsegmente grundsätzlich angeordnet sein können. Die jeweilige Kanalverbindung reiche dabei immer nur bis zu einer seiner nächsten Nachbarflächen und von da aus über die nachfolgenden Kanäle immer weiter bis hin zum Abfluss. Im gezeigten Beispiel (Abb. 3) besitzt jedes innere Feld acht nächste Nachbarn (die sog. *Moore-Nachbarn*).

Zur Verdeutlichung der o. g. Abschätzungen lässt sich z. B. die Energiedissipationsrate des Flussnetzwerks aus Abbildung 3 qualitativ zu einem Zahlenwert (in dimensionsloser Form) berechnen. Dieser Zahlenwert wird im Folgenden auch kurz Dissipationsrate genannt.

Um die Berechnung zu vereinfachen, sind (o.B.d.A.)

- die jeweiligen Flächen und Flächenabschnitte quadratisch,
- die Kantenlängen der Flächenabschnitte auf eine Einheitslänge von Eins normiert,
- die Wassermengen, die durch Berieselung jedem Flächenabschnitt pro Zeitschritt zugeführt werden, auf den Wert Eins normiert.

Die einzelnen Kanallängen l_i ergeben sich entweder zu $l_i = 0$, $l_i = 1$ oder $l_i = \sqrt{2}$. Der Durchfluss Q_i ergibt sich jeweils aus den Summen der Durchflussmengen und der Regenmenge des Abschnitts selbst. (siehe Tabelle 1)

Für jedes Kanalsystem lässt sich auf diese Weise die Dissipationsrate ermitteln und mit der eines andersartig strukturierten Netzwerks vergleichen. Wird nun ein vorgegebenes System in Teilen variiert, wobei einzelne Kanalsegmente etwas anders verlegt werden, indem sie z. B. über andere nächste Nachbarn entwässert werden, so entstehen Strukturen mit unterschiedlichen Dissipationsraten. Diese Variationen werden vom Computer so ausgeführt, dass die Veränderungen des Netzwerkes, die zu einer niedrigeren Dissipationsrate führen, als neues Ausgangsmuster gespeichert werden. Anhand dieser Optimierungsvorschrift entwickelt sich ein Netzwerk in einer Art evolutionärem Prozess in Richtung auf eine optimale Struktur, die einen Abfluss mit minimaler Energiedissipation erlaubt.

Das oben skizzierte Extremalprinzip der minimalen Dissipationsrate drückt sich im Optimierungsprozess darin aus, dass das zuströmende Wasser mithilfe möglichst weniger Teilsegmente und zugleich geringer Durchflussmengen abgeführt wird.

4.3 Simulation von Flussnetzwerken

Für die Computersimulation hat es sich als günstig erwiesen, nicht ein quadratisches, sondern ein dreieckiges Gitter als Grundlage der numerischen Berechnungen zu verwenden. (Darin sind beispiels-

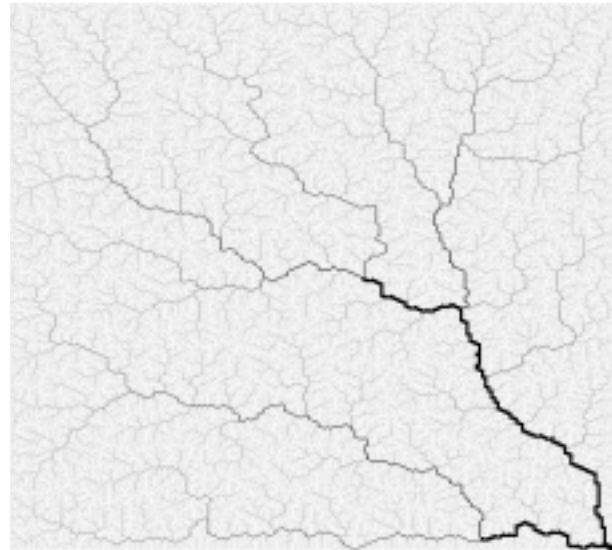


Abb. 6. Simulation eines Flussnetzwerkes mit Abfluss in der Ecke (auf einem Gitter mit 200 x 200 Feldern)

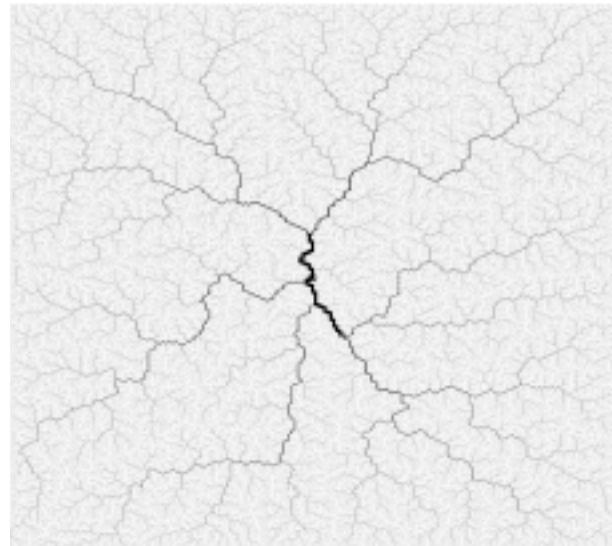


Abb. 7. Simulation eines Flussnetzwerkes mit Abfluss in der Mitte

$Q_i =$	1	1	2	1	1
	2	4	8	11	2
	1	6	25	1	1
	2	3	7	2	2
	1	1	1	4	1

$l_i =$	$\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	1
	1	1	1	$\sqrt{2}$	1
	1	1	0	1	1
	$\sqrt{2}$	1	1	1	$\sqrt{2}$
	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1

$$\begin{aligned}
 P_{Diss} \sim & \sqrt{1} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{1} \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{1} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{1} \cdot 1 \\
 & + \sqrt{2} \cdot 1 + \sqrt{4} \cdot 1 + \sqrt{8} \cdot 1 + \sqrt{11} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot 1 \\
 & + \sqrt{1} \cdot 1 + \sqrt{6} \cdot 1 + \sqrt{25} \cdot 0 + \sqrt{1} \cdot 1 + \sqrt{1} \cdot 1 \\
 & + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot 1 + \sqrt{7} \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \\
 & + \sqrt{1} \cdot 1 + \sqrt{1} \cdot 1 + \sqrt{1} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{1} \cdot 1 \\
 \approx & 41,07
 \end{aligned}$$

Tab. 1.

weise alle nächsten Nachbarn gleich weit voneinander entfernt). Eine mögliche Initialisierung eines Netzwerkes besteht z. B. darin, alle Flächenabschnitte der Reihe nach miteinander zu verbinden (vgl. Abb. 4, links). Die Dissipationsrate eines derartigen Netzwerkes erweist sich allerdings im Vergleich zu dem Kanalsystem aus Abbildung 3 oder der Realisation aus Abbildung 4 (rechts) als äußerst ungünstig.

Damit ein System während des Optimierungsprozesses nicht in einer Konfiguration gefangen bleibt, die zwar lokal, jedoch nicht global optimal ist, muss bei der Auswahl der jeweils neuen Iterationsstufe eine gewisse statistische Toleranz mit eingeplant werden. Um eine insgesamt optimale Konfiguration zu erreichen, muss zwischenzeitlich also auch eine Variation erlaubt sein, die eine höhere Dissipationsrate besitzt, um eben in den darauffolgenden Entwicklungsstadien einen global günstigeren Systemzustand erreichen zu können.

Die in Abbildung 5 dargestellte Zeitreihe zur Dissipationsrate zeigt deutlich, dass mithilfe des hier beschriebenen Algorithmus ein optimales Flussnetzwerk mit einer minimalen Energiedissipationsrate gewonnen werden kann. Simulationsergebnisse für Netzwerke auf größeren Gittern zeigen die Abbildungen 6 und 7.

5 Strukturen aus Zufall und Notwendigkeit

Verzweigungsstrukturen sind sowohl einfach als auch komplex. Einfach sind sie insofern, als sie einen extremen Zustand darstellen, in dem die Energiedissipationsrate minimal ist. Diese Einfachheit äußert sich jedoch auf komplexe Weise in einem kaum zu überschauenden vielfältig verzweigten Netzwerk. Dabei sind zufällige Einflüsse in den entscheidenden Phasen des Entstehungsprozesses auf bleibende Weise in das Muster des Netzwerks eingegangen.

Der Einfachheit der Minimalstruktur entspricht die Einfachheit des thermodynamischen Prinzips, das hier seinen konkreten Ausdruck findet: Da das System trotz der Dissipation von Energie das thermodynamische Gleichgewicht aufgrund der ständigen Zufuhr

von Materie und Energie nicht erreichen kann, tut es das Zweitbeste. Es kommt dem thermodynamischen Gleichgewicht so nahe wie möglich, indem es die Energiedissipationsrate als Maß für die Entfernung vom Gleichgewicht so klein wie möglich macht.

Das hier vorgestellte Beispiel soll einmal mehr demonstrieren, dass mithilfe einfacher thermodynamischer Überlegungen Probleme im Physikunterricht thematisiert werden können, die einerseits einen Beitrag zur Einführung in die nichtlineare Physik und zur Nichtgleichgewichtsthermodynamik liefern und andererseits ein zumindest globales Verständnis komplexer Selbstorganisationsvorgänge in der Natur ermöglichen.

Die beschriebene Software kann unter Einsendung eines frankierten Rückumschlags bei den Autoren bezogen werden oder im Internet unter www.uni-muenster.de/Physik/DP heruntergeladen werden.

Literatur

- [1] H. J. SCHLICHTING – V. NORDMEIER: Strukturen im Sand. Kollektives Verhalten und Selbstorganisation in einfachen Systemen. – MNU **49** (1996) Nr. 6, 323–332.
- [2] H. J. SCHLICHTING: Auf der Grenze liegen immer die seltsamsten Geschöpfe. Nichtlineare Systeme aus der Perspektive ihrer fraktalen Grenzen. – MNU **47** (1994) Nr. 8, 451.
- [3] H. J. SCHLICHTING,: Schöne fraktale Welt – Annäherungen an ein neues Konzept der Naturwissenschaften. – MNU **45** (1992) Nr. 4, 202–214.
- [4] V. NORDMEIER: Zugänge zur nichtlinearen Physik am Beispiel fraktaler Wachstumsphänomene. Ein generisches Fraktal-Konzept. – Münster: LIT-Verlag 1999.
- [5] I. PRIGOGINE – I. STENGERS: Dialog mit der Natur. – München: Piper 1983, 147 f.
- [6] T. SUN – P. MEAKIN – T. JOSSANG: A minimum energy dissipation model for river networks and their associated topographies. – In: Fractals, **3** (1993) Nr. 1, 576. Ders.: Minimum energy dissipation model for river basin geometry. – In: Physical Review E, 6/49 (1994) 4865.
- [7] T. SUN – P. MEAKIN – T. JOSSANG: The topography of optimal drainage basins. In: Water Resources Research, 9/30 (1994) 2599.