

Der chaotische Prellball

Beate Buttkus, H. Joachim Schlichting, Volkhard Nordmeier

Universität-GHS-Essen

Einleitung

"Es sieht so aus als seien die einfachen Gesetze der Natur entdeckt. Jedenfalls wird zur Zeit das Komplizierte und Nichtlineare mühsam angegangen."

F. Hund

In dieser Aussage von Friedrich Hund wird deutlich, wie schwer es ist, neue Gedanken und Konzepte in die Naturwissenschaften einzubringen. Hund sagte diese Worte Anfang der 60-iger Jahre. Aber erst in den letzten 10 Jahren schickt sich die nichtlineare Physik an, sich innerhalb der Naturwissenschaften zu etablieren.

Dieser Vorgang vollzieht sich jedoch gewissermaßen im Blickpunkt der Öffentlichkeit. In spektakulärer Weise begleiten die Massenmedien und der Sachbuchmarkt die Entwicklungen innerhalb der Naturwissenschaften.

Dies ist eine Herausforderung an die Schulphysik wie sie wohl ihresgleichen sucht: Welche Möglichkeit gibt es die Schülerinnen und Schüler an die wesentlichen Aussagen heranzuführen?

In den letzten Jahren wurde in der fachdidaktischen Literatur der Versuch unternommen Antworten auf diese Frage zu geben.

Eine weitere Antwort soll hier in Form eines einfachen Systems gegeben werden, das sowohl experimentell als auch theoretisch mit Mitteln der Schulphysik zugänglich ist.

Das System

Ausgangspunkt für unser System ist der Prellball. Ein auf dem Boden hüpfender Ball wird durch Stöße mit der Hand in Gang gehalten. Ein jedes Kind „weiß“ intuitiv, daß die Stärke und die Frequenz des Stoßes dem Ball phasenrichtig verabreicht werden muß. Andernfalls kommt die „Schwingung“ des Balles zwischen dem festen Boden und der bewegten Hand zum Erliegen.

Die Aufrechterhaltung der regelmäßigen Schwingung hängt also weitgehend von der meist unbewußt durchgeführten Steuerung der Handbewegung durch unser Gehirn ab.

Lassen sich die Vorgänge am Prellball mechanisieren?

Wir beantworten diese Frage in der Form eines Experimentes bei dem wir der Einfachheit halber in

geringfügiger Abweichung vom Phänomen des Prellballs gewissermaßen den Boden schwingen lassen. Dies entspräche dem Hüpfen eines Tennisballs auf dem Schläger.

Dazu benutzen wir eine sinusförmig schwingende Lautsprechermembran auf der wir einen Tischtennisball hüpfen lassen.

Von Bedeutung ist nur die vertikale Bewegung des Balles. Mögliche Reibungseffekte, sowie eine mögliche Auswirkung des Stoßes auf die Bewegung der Lautsprecherplatte werden vernachlässigt.

Die Energieverluste des Balles während des Stoßes werden durch den sogenannten „Restitutionskoeffizienten“ α erfasst.

$$\alpha = -\frac{v}{u}$$

Dabei ist u die relative Geschwindigkeit des Balles in Bezug auf die schwingende Platte zum Stoßzeitpunkt unmittelbar vor dem Stoß. Unmittelbar nach dem Stoß ist sie gleich. Für $0 \leq \alpha < 1$ in das System damit dissipativ, nur dieser Fall wird im weiteren behandelt.

Das System ist dreidimensional: Zur vollständigen Beschreibung des momentanen Zustandes sind z.B. Ort und Geschwindigkeit des Balles, sowie die Geschwindigkeit der Platte nötig.

Der Ball wird auf der Platte springen, wenn der Restitutionskoeffizient, die Frequenz und die Amplitude der Plattenbewegung genügend groß sind, ansonsten bleibt er auf ihr liegen. D.h. eine Schwingung des Balles kann nur dann aufrechterhalten werden, wenn die Geschwindigkeit der Platte die wir mit w bezeichnen, zum Zeitpunkt t_i größer ist als die Geschwindigkeit des Balles kurz vor dem Stoß. Wir betrachten also nur solche Stöße bei denen sich die Bewegungsrichtung des Balles nach dem Stoß umdreht.

Die Bewegungsgleichung

Die Bewegung des Balles läßt sich durch folgende Gleichung erfassen [2]:

$$v(t_i) - w(t_i) = -\alpha \cdot (u(t_i) - w(T_i)), \quad (1)$$

Dabei ist t_i der Zeitpunkt des i -ten Auftreffens des Balles. Eine mögliche Geschwindigkeitsabhängig-

keit des Restitutionskoeffizienten wird nicht berücksichtigt.

Wir nehmen an, daß

$$u(t_{i+1}) = v(t_i) \quad (2)$$

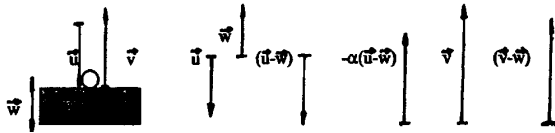


Bild 1: Veranschaulichung der gewählten Bezeichnungen [1].

gilt, d. h. die Geschwindigkeit des Balles kurz nach dem i -ten Stoß ist betragsmäßig gleich der Geschwindigkeit des Balles kurz vor dem $(i+1)$ -ten Stoß.

Die Zeit zwischen 2 Stößen läßt sich nun folgendermaßen abschätzen:

$$t_{i-1} - t_i = \frac{2 \cdot v(t_i)}{g} \quad (3)$$

Eine Kombination der Gleichungen (1) - (3) ergibt nun zwei gekoppelte rekursive Gleichungen, die eine Bestimmung des Zustandes des System beim $(i + 1)$ -ten Stoß aus dem Zustand des System beim i -ten Stoß erlaubt:

$$t_{i+1} = t_i + \frac{2 \cdot v(t_i)}{g} \quad (4)$$

$$v_{i+1} = \alpha \cdot v(t_i) + (1 + \alpha) \cdot w(t_{i+1})$$

Der Zustand des System wird also nur zu diskreten Zeitpunkten und zwar immer im Moment des Stoßes bestimmt.

Da sich der Ball zwischen zwei Stößen ausschließlich unter dem Einfluß der Schwerkraft bewegt, ist die Dynamik des System durch t_i und v_i vollständig festgelegt. Diese beiden Größen repräsentieren daher den Zustand des Systems im i -ten Stoß.

Das Experiment

Als oszillierende Platte wurde ein Lautsprecher mit einem großen Hub verwendet.

Es wird durch einen Sinusgenerator betrieben. Auf der Lautsprechermembran ist ein kleines Uhrglas angebracht, das eine rein vertikale Bewegung des Balles aufrecht erhalten soll. Zur Dokumentation und Auswertung der Ballbewegung werden die Stöße des Balles mit einem Mikrophon auf das Zwei-

kanal-Speicher-Oszilloskop übertragen und dort aufgezeichnet. An den zweiten Kanal des Oszilloskopes wird der Sinusgenerator angeschlossen. Dieses Signal ist ein Maß für die Größe der Amplitude der Lautsprecherbewegung.

Das Oszilloskop kann in zwei Moden betrieben werden. Erstes im XY-t-Modus, wobei beide Signale über der Zeit getrennt aufgezeichnet werden. Zweitens im XY-Modus, in dem beide Signale gegeneinander aufgetragen werden, der Spannungstoß vom Mikrophon in y -Richtung und das Signal vom Sinusgenerator in x -Richtung.

Dieser Aufbau genügt, um die wesentlichen Phänomene aufzuzeigen.

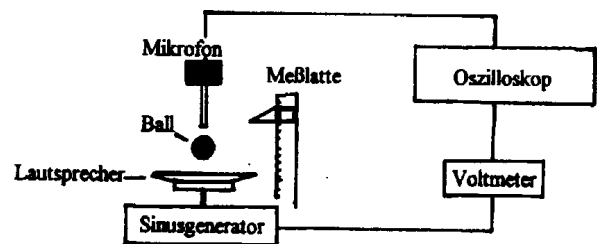


Bild 2: Versuchsaufbau

Die Zustände des Systems

Im folgenden wird der Ball mit fester Frequenz „geprellt“. Die Amplitude der Lautsprecheroszillation wird variiert (Kontrollparameter). Als Antwort des System wird die Steighöhe des Balls (Ordnungsparameter) angesehen.

Läßt man den Ball jeweils bei verschiedenen Amplituden aus einer gewissen Höhe auf die Platte fallen so lassen sich zwei grundsätzlich verschiedene Verhaltensweisen feststellen:

Erstens bewegt sich der Ball regulär, d.h. er trifft den Lautsprecher nach einer oder mehrerer Perioden immer mit derselben Geschwindigkeit in demselben Punkt der Auslenkung. Genau genommen kann sowohl die Geschwindigkeit des Balles als auch die Phasenlage im Auftreffpunkt in gewissen Grenzen vom Idealwert abweichen, ohne daß der Zustand zusammenbricht. Die Abweichungen werden aufgrund der Nichtlinearität vom System stets wieder abgebaut (Stabilität).

Die Anregungsperiode der Ballbewegung ist ein ganzzahliges Vielfaches der Periode der Lautsprecheroszillation. Der Ball bewegt sich in bestimmten Zyklen auf der Platte, beispielsweise ist ein Einer-Zyklus mit der Periode T der Anregung dadurch charakterisiert daß der Ball die Membran nach einer Periode der Lautsprecheroszillation einmal in einem Punkt der Auslenkung trifft (Bild 3a). Bei einem Zweier-Zyklus mit der Periode $4T$ der Anregung

trifft der Ball die Platte zweimal innerhalb von 4 Perioden der Lautsprecheroszillation.

Zweitens zeigt das System trotz regelmäßiger Anregung irreguläres Verhalten. Der Ball trifft in nicht vorhersehbarer Weise mit der Platte zusammen. Man sagt der Ball bewegt sich chaotisch (Bild 3.b).

Zwischen den Amplitudenbereichen, in denen der Ball regulär und chaotisch schwingt, treten Schwingungsmoden auf, bei dem der Ball erst nach zwei vier, usw. Stößen mit der Platte sein Verhalten wiederholt. Die Periode der Schwingung wird verdop-

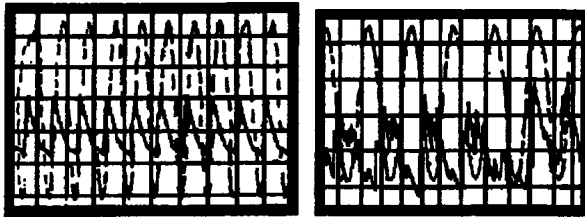


Bild 4 Oszilloskopaufnahme im XY-t Modus, ---: Signal Sinusgenerator, —: Spannungsstoß Mikrofon

(links): Einer-Zyklus mit der Periode T der Anregung, (rechts): chaotische Bewegung

pelt, vervierfacht, usw..Es zeigt sich, daß die Bewegung des Balles mit wachsender Amplitude stets über eine solche Sequenz der Periodenverdopplung ins Chaos übergeht.

Die Periodenverdopplung

Dieses Szenario der Periodenverdopplung läßt sich bei unserem System wenigstens in den ersten Schritten experimentell nachvollziehen.

Dazu wurde die Frequenz bei 10 Hz konstant gehalten und die Amplitude der Anregung variiert.

Wenn man ausgehend vom regulären Verhalten (Einer-Zyklus) die Amplitude langsam erhöht, hört man deutlich, wann eine Bifurkation eintritt. Aus dem Einer-Zyklus wird nun ein Zweier-Zyklus. Bevor nm diesen Zweier-Zyklus aber hört, sieht man ihn schon auf dem Oszillographenschirm im XY-Modus. In diesem Modus kann die Lage der Bifurkationspunkte besonders gut durch das Aufspalten der Peaks, beobachtet werden (Bild 4).

Erhöht man die Amplitude nun weiter, bifurkiert der Zweier-Zyklus in einen Vierer-Zyklus, der Vierer-Zyklus in einen Achter-Zyklus usw., bis sich das System chaotisch verhält. Mit unserem System gelang es allerdings nur die Periodenverdopplung bis zum Vierer-Zyklus nachzuweisen.

Der Weg vom regulären zum chaotischen Verhalten erfolgt also nicht abrupt, sondern das Chaos kündigt sich über die Periodenverdopplungssequenz quasi

vorher an.

Eine Standardmethode zur Darstellung des Bifurka-

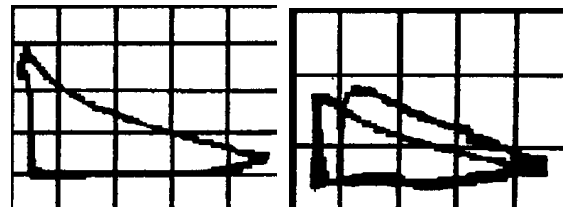


Bild 3 Oszilloskopaufnahme im XY-Modus, (a): Einer-Zyklus mit der Periode T der Anregung, (b): Zweier-Zyklus mit der Periode 2T der Anregung

tionsverhaltens dynamischer Systeme ist die Erstellung eines Bifurkationsdiagramms. Dazu trägt man die Werte einer einzigen Zustandskoordinate, in unserem Fall ist das jeweilige Stoßhöhe des Balles über dem Parameter auf, der variiert wird, also der Amplitude der Plattenbewegung. Nimm man als wahre Werte für die Bifurkationspunkte jeweils den Mittelwert zwischen der Spannung, bei der die Bifurkation klar zu erkennen ist und der Spannung, bei der dies noch nicht gegeben ist, so ergibt sich eine Abschätzung der sogenannten Feigenbaumkonstante nach:

$$\delta_F \approx \frac{(U_2 - U_1)}{(U_3 - U_2)} \quad (5)$$

Für die Bifurkationen des Einer-Zyklus (Bild 5) ergab sich daraus ein Wert überraschend guter Werte von $\delta_F \approx 4,0$. Die Feigenbaumkonstante $\delta_F = 4,6692$... stellt eine Naturkonstante dar.

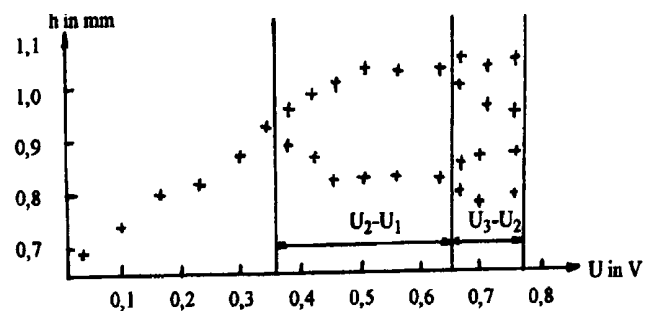


Bild 5: Bifurkationsdiagramm des Einer- Zyklus

Die Attraktoren des Systems

Die Bewegung des Balles in den jeweiligen Zyklen stellt einen Attraktor des Systems im Zustandsraum dar, alle Trajektorien eines bestimmten Zustandes werden von diesem Attraktor angezogen.

Nach Untersuchungen des Systems haben, wir festgestellt, daß es auf einem breiten Parameterbereich eine Vielzahl von Attraktoren hat, die sich mit unterschiedlicher Güte reproduzieren lassen. Dabei

wurde ein Frequenzbereich von 8 bis ca. 25 Hz durchlaufen und die Amplitude von 0.01 V bis ca. 3 V variiert.

Weiterhin hat sich gezeigt, daß dieses System sogenannte koexistierende Attraktoren besitzt, d.h. bei gleicher Frequenz und Amplitude existieren zwei unterschiedliche Attraktoren nebeneinander. So existieren beispielsweise bei einer Frequenz von 10 Hz und einer Amplitude von 0,04 V der stabile Einer-Zyklus mit der Periode T der Anregung und der stabile Dreier-Zyklus mit der Periode $3T$ der Anregung nebeneinander.

Allein die Anfangsbedingungen entscheiden darüber, in welchen Zustand sich das System begibt. Sie wurden nur über die Starthöhe des Balles variiert, da die Phasenlage zur Anregung im Moment des Fallenlassens mit einfachen experimentellen Mitteln nicht kontrolliert werden kann. Die Anfangsbedingungen sind also nie exakt gleich. Es läßt sich aber für jeden Zustand ein Starthöhenintervall angeben, in dem der Ball mit einer höheren Wahrscheinlichkeit in diesem Zustand gelangt. Diese optimalen Starthöhen des Balles entsprechen jeweils der maximalen Steighöhe, die der Ball in dem jeweiligen Zustand erreichen kann.

Literatur:

[1] *J. Lübbe*: Experimentelle und theoretische Untersuchungen an einfachen dynamischen Systemen. Examensarbeit, Universität Osnabrück, 1987

[2] *Holmes*: The dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table.

Journal of Sound and Vibration, 84(2), 1982

[3] *Tufillaro, Albano*: Chaotic dynamics of a bouncing ball. American Journal of Physics, 54(10); 1986

[4] *H. J. Schlichting*: Strukturen im Chaos. physica didactica 18/1, 1991