

# Nichtlinearität und Strukturbildung Chaos für die Schule!

VOLKHARD NORDMEIER | HANS-JOACHIM SCHLICHTING

*Ob Konvektion im Milchkaffee oder Wolkenbildung: Im Alltag gibt es viele nichtlineare Phänomene, die Schüler beobachten und erfolgreich analysieren können. So kann die Schulphysik spannende Themen aus der modernen Chaos-Forschung behandeln.*

Schulphysik muss keinesfalls beim Bohrschen Atommodell aufhören. Es gibt aktuelle Forschungsgebiete, die den Unterricht mit faszinierenden Themen befruchten können. Sie vermitteln den naturwissenschaftlichen Zugang zu unserer Welt anschaulich über Naturbeobachtung, Experiment und Theorie. Eine solche Möglichkeit bietet die nichtlineare Physik. Es gibt in unserer Alltagswelt viele gut beobachtbare Strukturen, die durch nichtlineare Effekte entstehen. Wir stellen hier einige Beispiele und ein Modellsystem vor, an denen schon Schüler wesentliche Aspekte der nichtlinearen Physik kennen lernen können.

## Muster auf dem Milchkaffee

Wenn man heißen Kaffee mit Milch versetzt oder Kakao-Pulver in heißes Wasser gibt, lässt sich mit etwas Glück eine polygone Zellenstruktur an der Oberfläche des Getränks beobachten. Dieses Zellenmuster ist entgegen dem Augenschein alles andere als starr. Ein näherer Blick zeigt, dass kollektive Strömungen in der Flüssigkeit es hervorbringen. Sie werden durch die in der Flüssigkeit suspendierten Milch- oder Kakao-Bestandteile sichtbar. Im Jahr 1900 entdeckte der Physiker Henri Bénard diese Zellenstruktur, deshalb spricht man auch von Bénard-Zellen. Dieses Phänomen ist heute noch immer wissenschaftlich interessant [1].

> Abb. 1 Polygonaalmuster in einer dünnen Ölschicht, die mit Kupferpulver versetzt wurde.

>> Abb. 2 Wolkenstrukturen machen die Konvektionsdynamik von Luftmassen sichtbar.



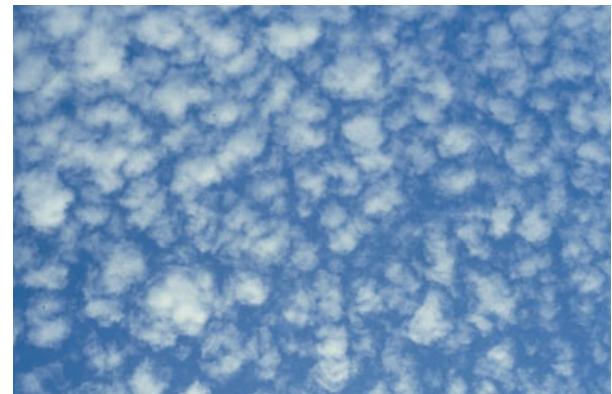
Ein Freihandexperiment kann die Bénard-Zellen sehr eindrucksvoll demonstrieren. Dazu versetzt man etwas Silikonöl mit Metallpulver als Indikator, gibt eine wenige Millimeter hohe Schicht in eine flache Schale (Deckel einer Cremedose) und heizt diese möglichst gleichmäßig von unten auf. Schon einige Teelichter rufen innerhalb kurzer Zeit eindrucksvolle Polygonmuster hervor (Abbildung 1).

## Bénard-Konvektion und Wetter

Einer der grundlegenden Vorgänge des Wettergeschehens ist die Konvektion von Luftmassen. Die Erdoberfläche wird von der Sonne bestrahlt und erwärmt die Luftschicht über dem Boden. Sie steigt dann in die höheren Luftschichten auf, die kälter und dichter sind. Manchmal entstehen dabei Wolkenstrukturen, die ähnliche Konvektionsmuster wie die Bénard-Konvektion zeigen (Abbildung 2). Der Wasserdampf der aufsteigenden, warmen Luft kondensiert in der kühlen Höhe als Wolken aus und macht die Bewegungsstruktur sichtbar.

1963 gelang es dem Meteorologen Edward N. Lorenz [2], das Prinzip dieses grundlegenden Wettermechanismus durch drei gekoppelte nichtlineare Differentialgleichungen zu beschreiben („Das Lorenz-System“, S. 39) [3, 4]. Er machte dabei eine interessante Entdeckung: Die Reduktion des von vielen Variablen abhängigen Wettergeschehens auf ein derartig einfaches System schränkte die Komplexität seiner Verhaltensmöglichkeiten in keiner Weise ein. Er fand, dass auch ein von nur drei Variablen bestimmtes System unvorhersagbares, also chaotisches Verhalten zeigen kann.

Das Lorenz-System ist schon aufgrund der drastischen Reduktion der Variablen weit davon entfernt, eine auch nur annähernd realistische Beschreibung des Wetters zu liefern.



Es zeigt aber unter anderem, dass die langfristige Unvorhersagbarkeit des Wetters weniger auf der unüberschaubaren Zahl der Variablen beruht als vielmehr auf der Nichtlinearität des Systems. Die Untersuchung des Lorenz-Modells stellt daher die einfachste Möglichkeit dar, Aufschluss über die wesentlichen Merkmale eines derartigen komplexen Systems zu erlangen. Außerdem ist das Lorenz-Modell auch den Mitteln der Schulphysik zugänglich.

### Das chaotische Wasserrad

Das Lorenz-System ist ein eindrucksvolles Beispiel für eine Eigenschaft hochdimensionaler Vierteilchensysteme, wie sie die Atmosphäre darstellt: Sie können durch Mechanismen, die einem Phasenübergang ähneln, aus der enormen Vielfalt möglicher Verhaltensweisen eine Struktur herauslösen, die allein durch nur drei Freiheitsgrade bestimmt ist [5]. Innerhalb des Systems kommt es zu einem kollektiven Verhalten, das an eine starre mechanische Koordination der Teilchen untereinander erinnert. Die Lorenzsche Reduktion der Komplexität des Wettergeschehens ist also drastisch: Sie lässt nur noch ein „mechanisches Gerippe“ der thermodynamischen Konvektion in einem Fluid übrig.

Deshalb kann man diese Idee in eine mechanische Konstruktion umsetzen. Dabei erhält man ein Modell, das im Experiment einfach bedienbar ist und dessen Verhalten die Lorenz-Gleichungen beschreiben. Es erlaubt somit, das Verhalten komplexer nichtlinearer Systeme mit einfachen Mitteln experimentell zu demonstrieren und zu untersuchen [6]. Das Modell realisiert die starren Konvektionswirbel, deren Motor die thermisch bedingten Dichteänderungen der Flüssigkeit sind, durch ein Wasserrad. Eine detaillierte Beschreibung des Versuchsaufbaus findet sich auf der Homepage von *Physik in unserer Zeit* ([www.wiley-vch.de/home/phiuz](http://www.wiley-vch.de/home/phiuz)).

Abbildung 3 zeigt den Versuchsaufbau: Zentrales Element ist ein Fahrrad-Vorderrad, das um seine Nabe drehbar gelagert ist. Die Felge ist mit einem Kranz von baugleichen Wasserbehältern versehen. Sie sind beweglich aufgehängt, so dass ihre Öffnungen während der Drehung des Rades – wie die Gondeln eines Riesenrades – stets nach oben zeigen. Jeder Wasserbehälter hat im Boden ein kleines Abflussloch, dessen Größe ebenfalls für alle Wasserbehälter gleich ist. Angetrieben wird das Rad mit Wasser. Es regnet aus einem gleichmäßig perforierten Behälter herab, der einen größeren Teil des Raddurchmessers überdeckt: So soll sich der Massenfluss des Wassers möglichst gleichmäßig über beide Seiten des Rades verteilen.

Deshalb ist es auf den ersten Blick nicht einsichtig, warum das Rad sich jemals drehen soll. Eine gleichmäßige Wasserberieselung, so würde man vermuten, kann ja keine ungleichmäßige Verteilung von Wasser in den Behältern verursachen. Denn nur eine exzentrische Massenverteilung würde zu einem resultierenden Drehmoment führen, das ungleich Null ist. Wie der folgende Abschnitt zeigt, wird das Rad jedoch genau so bewegt. Hier sei schon ein wesent-

licher Punkt verraten: Die Wasseraufnahme und -abgabe der Gondeln variiert.

Dieses Wasserrad bildet ein mechanisches Analogon zur Bénard-Konvektion. Der Wasserzufluss von oben entspricht der Abkühlung der oberen Schicht des Fluids und der damit verbundenen Gewichtszunahme. Die Wärmeleitung innerhalb des Fluids wird hier vom Wasserfluss von höheren in tiefere Wasserbehälter nachgebildet.

### Wie bewegt sich das Wasserrad?

Die Bewegung des Wasserrads hängt von mehreren Parametern ab. Von praktischer Bedeutung für das Experiment sind das zuströmende Wasser, die Querschnittsöffnung der Abflüsse der Gondeln und die Achsreibung des Rades. Da von diesen Parametern der zufließende Wasserstrom am einfachsten zu steuern ist, dient er als *Kontrollparameter*. Reibung und Querschnitt der Abflusslöcher werden auf geeignete Werte festgelegt. Als *Ordnungsparameter* bietet sich die Drehgeschwindigkeit des Rades an, die in Abhängigkeit vom Wasserstrom zu verschiedenen Bewegungsfiguren führt. Unter einer Bewegungsfigur soll das „Endverhalten“ des Systems verstanden werden. Dieses Verhalten spielt sich nach einiger Zeit ein und verändert sich qualitativ nicht mehr, solange der Kontrollparameter seinen Wert beibehält.

Um einen systematischen Überblick über die Verhaltensmöglichkeiten des Wasserrades zu erlangen, fahren wir den Kontrollparameter durch den Wertebereich, der für das System relevant ist. Dabei lassen wir das Rad in der Regel aus der Ruhe starten. Bei sehr geringem Wasserstrom fließt das Wasser sofort durch die Abflusslöcher der Behälter wieder ab. Da dies bis auf kleine Fluktuationen für alle Behälter gleichermaßen gilt, ändert sich an der symmetrischen Verteilung des Drehmoments des Rades nichts, und es bleibt in Ruhe. Diese Ruhelage ist stabil. Stößt man das Rad leicht an, so kommt es schnell wieder zum Stillstand.

Nimmt der Wasserstrom zu, dann kann das Wasser nicht so schnell wieder abfließen. Es staut sich in den oberen Behältern etwas auf. Solange die Achsreibung der Wasserbehälter die dadurch bedingten zufälligen Abweichungen von der Gleichverteilung noch ausgleicht, bleibt das Rad in Ruhe oder kommt – wenn auch viel langsamer – wieder zur Ruhe. Je stärker der Wasserstrom wächst, desto mehr Wasser sammelt sich in den oberen Behältern. Das Rad bekommt eine zunehmend koplastige Massenverteilung.



Abb. 3 Das chaotische Wasserrad im Experiment.

Wenn der Wasserstrom schließlich einen *kritischen Wert* überschreitet, führt diese Kopflastigkeit zu einer labilen Situation: Es genügt der sprichwörtliche Tropfen, um eine Drehung in der einen oder anderen Richtung in Gang zu bringen. Der darin steckende Zufall bricht die Symmetrie des ruhenden Rades. Sobald die Entscheidung für eine Drehrichtung gefallen ist, bleibt es auch dabei. Der Zufall wird gewissermaßen in der Drehrichtung konserviert. Kleine Störungen können daran nichts ändern.

Dieser Wechsel von Ruhe zur Drehung ähnelt einem Phasenübergang. Dreht sich das Rad beispielsweise nach links, dann überwiegen auf dieser Seite die etwas stärker gefüllten Behälter. Sie kommen auf dem Weg unter der Regenrinne hindurch gerade aus dem Regen und hatten noch wenig Gelegenheit, wieder Wasser abzulassen. Auf der rechten Seite steigen dagegen Behälter von unten auf, die auf dem letzten Teil ihrer Rundreise durch die oberen Behälter weitgehend vom Regen abgeschirmt waren. Ihr Massenzufluss beschränkte sich fast nur auf das Wasser, das sie aus den künstlichen Lecks der oberen Behälter empfingen. Sie tragen also weniger Wasser und sind somit leichter.

Auch die Tatsache, dass durch die Abflussöffnungen der oberen Behälter wieder Wasser in die unteren Behälter strömt, ändert nichts an der Asymmetrie. Denn bei dieser Wasserzufuhr sind die unteren Behälter auf der linken Seite ebenfalls bevorzugt: Sie haben hauptsächlich stark gefüllte Behälter über sich, die folglich auch mehr Wasser abgeben. Im Mittel befindet sich also stets die größere Wassermasse auf der linken Radseite, wodurch das linksdrehende Moment überwiegt.

Im gerade betrachteten Fall eines noch relativ geringen Wasserstroms stellt sich eine Drehbewegung in eine Richtung stabil ein. Kleine Schwankungen in der Wasserhöhe der Behälter und damit im Verhältnis der Drehmomente zueinander werden stets wieder abgebaut, weil mit dem Wasserstand auch die Abflussrate zunimmt.

Mit zunehmendem Wasserstrom stellt sich das stationäre Gleichgewicht zwischen Zu- und Abfluss bei immer höher-

rem Wasserstand in den Behältern ein. Das antreibende Drehmoment und mit ihm die Drehgeschwindigkeit nehmen dementsprechend zu. Allerdings dauert es mit wachsender Drehgeschwindigkeit immer länger, bis das durch zunehmende Schwankungen geprägte Einschwingverhalten (Transienten) abgebaut ist. Der stationäre Endzustand wird also immer später erreicht.

Wie kommt es zu diesen Schwankungen? Mit wachsendem Zustrom nimmt das aus der Ruhe startende System zunächst viel Wasser auf. Dadurch wachsen das linksdrehende Moment und die Drehgeschwindigkeit ebenfalls stark an: Die Behälter dringen zum einen tiefer in den rechten Bereich des Rades ein, bevor sie merklich Wasser abgegeben haben. Zum anderen sinkt die Verweilzeit der Behälter im Zustrombereich und sie nehmen weniger Wasser auf. Erstes führt zu einer Zunahme des rechtsdrehenden, Letzteres zu einer Abnahme des linksdrehenden Moments, beides zusammen also zu einer Abbremsung des Rades. Nun kann es wieder mehr Wasser aufnehmen. Damit wächst die Drehgeschwindigkeit erneut an – wenn auch zunächst noch auf einen kleineren Wert als beim vorhergehenden Umlauf.

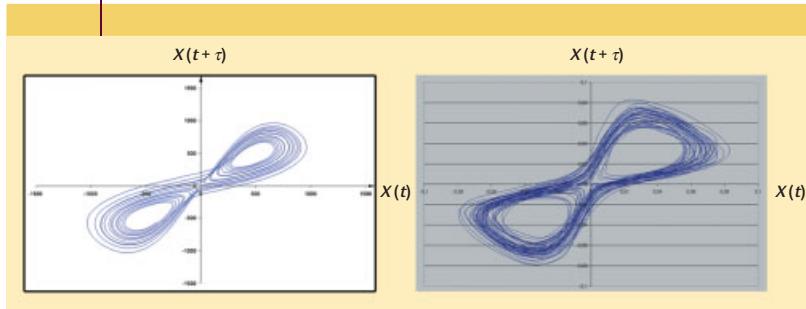
Erhöht man den Wasserstrom weiter, so wird schließlich ein *zweiter kritischer Wert* überschritten. In einem erneuteten Wechsel, der wieder an einen Phasenübergang erinnert, kehrt das Rad seine Drehrichtung um: Die stark angefüllten Behälter des linken Radbereichs gelangen dann derart schnell in den rechten Bereich, dass die nach oben geförderten, weitgehend entleerten Behälter sich kaum füllen können. Deshalb schaffen sie kein Gegengewicht, das genügt, um die schweren Behälter über den Umkehrpunkt zu drehen: Die Behälter sausen wieder zurück. Das tun sie mit einer etwas reduzierten Geschwindigkeit, weshalb es zu keiner weiteren Richtungsumkehr kommt. Die zunächst starken Schwankungen bauen sich bis zur stationären Drehung ab – nunmehr mit umgekehrtem Drehsinn.

### Übergang ins Chaos

Erhöht man den Zustrom weiter, dann erreicht er einen *dritten kritischen Wert*. Er ist nun so stark, dass die Schwankungen nach der Richtungsumkehr noch nicht genügend vermindert sind, um schließlich in die stationäre Drehung einmünden zu können. So entwickelt sich eine völlig neue Bewegungsfigur: Das Wasserrad bleibt – anschaulich gesprochen – in dem Bemühen gefangen, nach der Richtungsumkehr die Schwankungen abzubauen. Deshalb kehrt sich die Bewegungsrichtung immer mal wieder um. Allerdings pendelt sich das System dabei nicht etwa in eine gleichförmige Schwingung ein. Stattdessen entwickelt es eine völlig unregelmäßige Bewegungsfigur. Auch im Endzustand zeigt es ungeordnete Wechsel zwischen ungleichförmigen Schwingungen und Drehungen, die der Begriff *chaotisch* zutreffend beschreibt.

Über Chaos kann man sich nur schwer eine Anschauung verschaffen, sonst wäre es kein Chaos. Wir können uns aber plausibel machen, warum es gerade nach Überschreiten des dritten kritischen Punktes entsteht. Voraussetzung

ABB. 4 | ZWEIDIMENSIONALER ATTRAKTOR



**Zweidimensionale Attraktor-Rekonstruktionen aus den simulierten (links) und aus den experimentellen (rechts) Daten des chaotischen Wasserrades. Die simulierten Daten entsprechen denen in Abbildung 8, die experimentellen denen in Abbildung 8 rechts. Links repräsentiert  $X(t)$  die simulierte Strömungsgeschwindigkeit, rechts die gemessene Tachospannung.**

für chaotisches Verhalten ist die Sensitivität des Systems, wonach kleinste Störungen sehr schnell verstärkt werden. Im vorliegenden Fall kann sich das Drehmoment des Rades von der einen in die andere Richtung ändern, bevor noch ein Umlauf vollendet wurde. Die irreguläre Bewegungsfigur ist geprägt von Phasen verhaltenen Zögerns und schnellen Spurts.

Nun könnte man erwarten, dass eine weitere Steigerung des Wasserstroms keine grundsätzliche Veränderung mehr hervorrufen kann. Doch kurz bevor der maximale Wasserstand in den Behältern den oberen Rand erreicht, verschwindet bei einem *vierten kritischen Punkt* das Chaos wie ein Spuk. Im Rauschen eines starken Wasserstroms findet das Wasserrad wieder zu einer „geordneten“ Bewegungsfigur zurück, dieses Mal allerdings einer regulären Schwingung.

### Quantitative Beschreibung

Um das Verhalten des Wasserrades quantitativ zu bestimmen, beschreiben wir die Drehbewegung durch die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses. Dieser setzt sich aus der Summe zweier Drehmomente zusammen: Das Erste bewirkt der Wasserinhalt  $m(\varphi)$  eines an der Felge (Radius  $r$ ) angebrachten Behälters am Ort eines Winkels  $\varphi$ . Gegen dieses Drehmoment wirkt ein zweites, das die Reibung an der Achse verursacht. Dabei nehmen wir an, dass die Reibung proportional zur Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist. Für den Antrieb ist die gesamte Wassermasse ausschlaggebend, die sich auf alle Behälter verteilt. Zur Vereinfachung denken wir uns die Wassermasse als kontinuierlich über alle Winkel  $\varphi$  verteilt: Das wäre also ein Rad mit unendlich vielen, infinitesimal kleinen Behältern mit unendlich vielen Abflüssen.

Die zeitliche Änderung der Massenverteilung bestimmt sich aus der Differenz des Massengewinns durch den Zufluss und des Massenverlusts durch den Abfluss. Der Verlust kann als proportional zur Wassermasse  $m(\varphi)$  in den Behältern angesetzt werden. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Wasserzufluss proportional zur Höhe der Gondeln über dem unteren Radrand ist. Diese Näherung ist umso besser, je gleichmäßiger der Wasserzufluss über den gesamten Querschnitt des Rades ist.

Eine detaillierte Herleitung der Bewegungsgleichungen geben wir auf [www.wiley-vch.de/home/phiz](http://www.wiley-vch.de/home/phiz). Die eben gegebene Beschreibung lässt sich in einer Differentialgleichung ausdrücken, die durch eine Lineartransformation in eine spezielle Form der Lorenz-Gleichungen überführt werden kann:

$$\dot{X} = \sigma(Y - X), \dot{Y} = RX - Y - XZ, \dot{Z} = XY - Z \text{ mit}$$

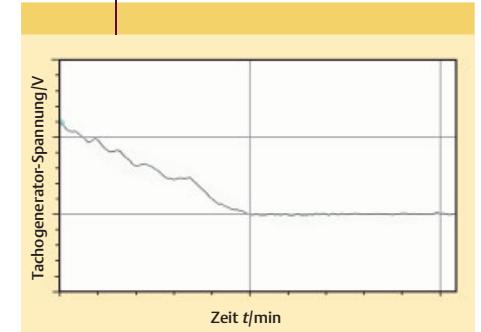
$$\sigma = \frac{k}{2\pi Ar^3} \quad \text{und} \quad R = \frac{g\pi Ar^2}{kb}.$$

Dabei ist  $r$  der Radius des Rades,  $k$  die Reibungskonstante,  $A$  der Wasserzufluss,  $g$  die Erdbeschleunigung und  $b$

die Höhe. Dieser Fall lässt sich nicht elementar analytisch auswerten, sondern muss numerisch integriert werden. Wir wählen  $R$  als Kontrollparameter, der linear mit dem Wasserzufluss  $A$  variiert. Da  $\sigma$  und  $A$  umgekehrt proportional zueinander sind, gilt  $\sigma R = \text{const.}$  Um zu den experimentellen Ergebnissen passende Werte zu erhalten, haben wir  $\sigma R = 240$  gesetzt.

Wir betrachten die Bewegungen des Wasserrades zum einen als Zeitreihe. Dazu tragen wir die im Wesentlichen durch die direkt gemessene Winkelgeschwindigkeit bestimmte Variable  $X$  als Funktion der Zeit auf. Zum anderen stellen wir die Bewegung im Zustandsraum des Systems dar: Das ist der durch die Variablen  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  aufgespannte, dreidimensionale und abstrakte Raum, in dem eine charakteristische Bahn das Verhalten des Systems beschreibt: die „Trajektorie“. Dabei sind die Observablen  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  im Folgenden immer dimensionslos.

ABB. 5 | RUHEZUSTAND



**Trotz eines manuellen Impulses kommt das Wasserrad wieder zur Ruhe ( $R_E < 1$ ). Die Tachogenerator-Spannung ist ein Maß für die Winkelgeschwindigkeit des drehenden Rades.**

### Von Trajektorien und Attraktoren

Das Endverhalten, auf das sich das System nach dem Start schließlich einstellt, lässt sich mathematisch durch die Fixpunkte analysieren. Das sind die Punkte im Zustandsraum, die bei der zeitlichen Entwicklung des Systems invariant sind, bei denen also sämtliche zeitlichen Ableitungen der Variablen verschwinden. Wenn das Wasserrad zur Ruhe kommt, windet sich die Trajektorie spiralförmig auf den Ursprung als Fixpunkt zu, auf dem sie fortan verbleibt. Bei den Drehbewegungen laufen die Trajektorien in Spiralen je nach Drehsinn auf einen der beiden symmetrisch zueinander im Zustandsraum gelegenen Fixpunkte zu.

Neben den Fixpunkten wird das System durch Attraktoren beschrieben. Unter Attraktoren versteht man im Prinzip die Grenzmengen, auf die das System sich hin entwickelt [7, 8]. Eine gewisse Anschaulichkeit erlangen Attraktoren in Form von geometrischen Gebilden im Zustandsraum, die das Langzeitverhalten des Systems darstellen. Wenn das System zur Ruhe kommt, endet die Trajektorie in einem Punkt (Punktattraktor). Stellt sich eine stationäre Drehung ein, so läuft die Trajektorie in sich selbst zurück und stellt eine geschlossene Kurve dar (Grenzzyklus).

Interessant wird das Attraktorkonzept eigentlich erst für chaotische Bewegungen. Bei der direkten Beobachtung des Systems kann man nämlich kaum die Zeitreihe einer chaotischen von einer rein stochastischen Bewegung unterscheiden. Die Darstellung im Zustandsraum zeigt hingegen für die chaotische Bewegung ein zweifach gebogenes, kompaktes und ästhetisches Gebilde: Die chaotische Trajektorie windet sich wie auf einer Achterbahn um zwei Fixpunkte, ohne sie je zu erreichen. Abbildung 4 zeigt solche Achterbahnen – wie sie erzeugt wurden, beschreiben wir weiter unten.

Der Attraktor repräsentiert also die Gesamtheit dieser Annäherungsversuche und lässt die darin verborgenen Ordnungsbemühungen des Systems zu einer geometrischen Gestalt gerinnen. Auf diese Weise vermittelt er die Einsicht, dass auch die irreguläre Bewegung Ausdruck einer tieferen Regelmäßigkeit sein kann. Würde das System sich hingegen rein stochastisch bewegen, dann ergäbe auch seine Bahn im Zustandsraum kein regelmäßiges Muster.

Im Bereich der chaotischen Wasserrad-Bewegung ist die morphologische Ähnlichkeit der Attraktoren die einzige Möglichkeit, das theoretisch berechnete und das gemessene Verhalten zu vergleichen (Abbildung 4). Dazu muss man aber aus den experimentellen Daten die Zustandsraum-Darstellung ermitteln. Das erscheint auf den ersten Blick aussichtslos, weil wir keine einfache Möglichkeit haben, die Variablen  $Y$  und  $Z$  zu messen. Wegen der nichtlinearen Abhängigkeit der Variablen untereinander enthält die Variable  $X$  aber auch Informationen über das Verhalten von  $Y$  und  $Z$ . Darauf basiert ein Rekonstruktionsverfahren: Es erlaubt uns, mögliche Werte von  $Y$  und  $Z$  aus  $X$  anhand „zeitverzögter“ Koordinaten zu „berechnen“. Die zeitverzögerte  $Y$ -Koordinate wird in den Abbildungen durch die Delay-Variable  $X(t + \tau)$  dargestellt. Eine genauere Beschreibung der Rekonstruktion geben wir auf [www.wiley-vch.de/home/phiuz](http://www.wiley-vch.de/home/phiuz), Beispiele finden sich auch in [7, 9, 10].

### Vergleich zwischen Theorie und Experiment

Bei der numerischen Auswertung der Bewegungsgleichungen betrachten wir das Systemverhalten für verschiedene Werte des Parameters  $R$ . Die grafische Darstellung der zeitlichen Entwicklung beschränken wir auf  $X(t)$ -Diagramme, weil der Koordinate  $X$  die anschaulichste Bedeutung kommt. Sie ist im Wesentlichen durch die Winkelgeschwindigkeit des Wasserrades bestimmt (siehe Herleitung der Bewegungsgleichungen auf [www.wiley-vch.de/home/phiuz](http://www.wiley-vch.de/home/phiuz)). Deshalb nennen wir sie im Folgenden der Einfachheit halber auch so. Das Verhalten im eigentlich dreidimensionalen Zustandsraum stellen wir der Übersichtlichkeit halber als zweidimensionale Projektionen dar: die Wasserverteilung im Wasserrad  $Y$  über der Winkelgeschwindigkeit  $X$ .

Den Wasserzufluss  $A_E$  haben wir experimentell bestimmt. Der Grenzfall des Wasserzuflusses, bei dem das System gerade noch zur Ruhe kommt oder gerade mit der Drehung anfängt, ist experimentell nur schwer zu bestimmen. Bei unserem Wasserrad lag er bei  $A_E \approx 18 \text{ cm}^3/\text{s}$ . Da in den Bewegungsgleichungen  $R$  linear mit dem Wasserzufluss variiert, haben wir die hier dargestellten experimentellen Ergebnisse auf diesen Zufluss normiert ( $R_E := 1$ ).

Die Untersuchung beginnt mit geringem Wasserzufluss und entsprechend kleinen Werten des Kontrollparameters  $R$  oder  $R_E$ . Sie werden den einzelnen Bewegungsfiguren entsprechend Schritt für Schritt erhöht. Im Experiment gehen wir stets vom Ruhezustand aus: Dazu haben wir die Anfangsbedingungen in der Computersimulation so gewählt, dass das System in der Nähe des Ursprungs startet.

### Ruhezustand

Für kleine Werte von  $R$  ( $0 \leq R < 1$ ) kommt das System stets zur Ruhe. Ursprung des Zustandsraums und einziger Fixpunkt des Systems fallen zusammen. Im Experiment lässt sich das nachvollziehen, indem man bei sehr geringem Wasserstrom  $R_E$  das Rad manuell in Bewegung setzt. Es kommt dann allmählich wieder zum Stillstand, wie Abbildung 5 zeigt. Diese und die folgenden Abbildungen sind übrigens mit dem Programm SiniS (Simulation nichtlinearer Systeme) erzeugt, das von [www.wiley-vch.de/home/phiuz](http://www.wiley-vch.de/home/phiuz) heruntergeladen werden kann.

### Gleichförmige Drehung

Sobald  $R$  den Wert 1 überschreitet, setzt eine Drehung in der einen oder anderen Richtung ein.  $R = 1$  entspricht also dem ersten kritischen Wert. Eine Stimmgabelbifurkation sorgt dafür, dass der Fixpunkt im Ursprung instabil wird und zwei neue Fixpunkte entstehen [6]. So lange  $R \leq 1,125$  bleibt, handelt es sich um stabile Knoten: Die Trajektorien eines bei  $X = 0$  gestarteten Systems laufen je nach der zufällig eingeschlagenen Drehrichtung direkt auf einen von beiden zu. Oberhalb eines Wertes  $R = 1,125$  nähert sich die Trajektorie dem jeweiligen Fixpunkt nicht mehr direkt, sondern auf einem spiralförmigen Weg.

Im Experiment zeigt sich dieses Szenario, indem der Ruhezustand ab einem Wasserzufluss von  $A_E \approx 18 \text{ cm}^3/\text{s}$  (also  $R_E = 1$ ) instabil wird: Das Rad beginnt sich in einer durch zufällige Störungen bestimmten Richtung zu drehen und steuert schließlich unter abklingenden Schwankungen (Abbildung 6) eine feste Drehgeschwindigkeit an (Abbildung 6 rechts). Mit wachsendem Wasserstrom nehmen die Schwankungen und die Endgeschwindigkeit zu.

### Vorchaotischer Bereich

Oberhalb von  $R = 15,9$  kann das aus der Ruhe startende Wasserrad den Fixpunkt nicht mehr erreichen. Es mündet in einen instabilen Grenzzyklus ein (heterokline Verbindung [6]), indem es unentschlossen zwischen positiven und negativen  $X$ -Werten hin und her pendelt. Rein qualitativ kann das Verhalten nicht eingeordnet werden. Erst der Blick in den Zustandsraum zeigt, dass das Wasserrad ein chaotisches Verhalten angenommen hat. Ursache ist eine so genannte Blue-Sky-Katastrophe [6]. Dennoch kann das System auch in diesem Parameterbereich in ein reguläres Verhalten einmünden. Dazu muss man es nicht aus der Ruhe, sondern von passenden anderen Punkten aus starten (Abbildung 7).

Mit anderen Worten: Im Intervall  $15,9 < R < 19,5$  coexistieren das chaotische und das reguläre Verhalten. Dabei erweist sich der einmal eingenommene Bewegungszustand als relativ unempfindlich gegenüber stetigen Variationen von  $R$ : Erst bei Überschreiten der Intervallgrenze kippt das System aus dem chaotischen Verhalten in die reguläre Drehung oder umgekehrt (Hysterese).

Stellt man im Experiment den Wasserzufluss von Anfang an auf  $R_E \approx 16$ , dann beginnt das Rad sofort, sich heftig zu drehen. Es dreht sich jedoch mit stark schwanken-

ABB. 6 | GLEICHFÖRMIGE DREHUNG

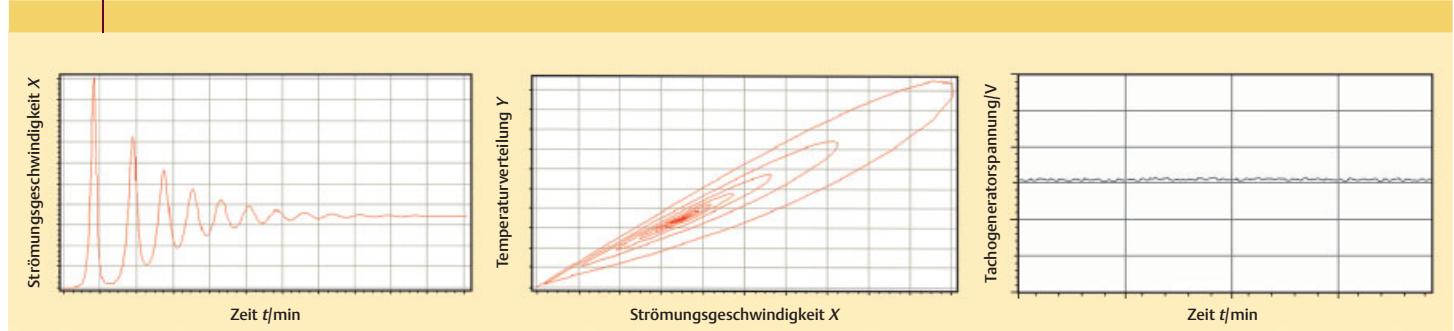


ABB. 7 | VORCHAOTISCHER BEREICH

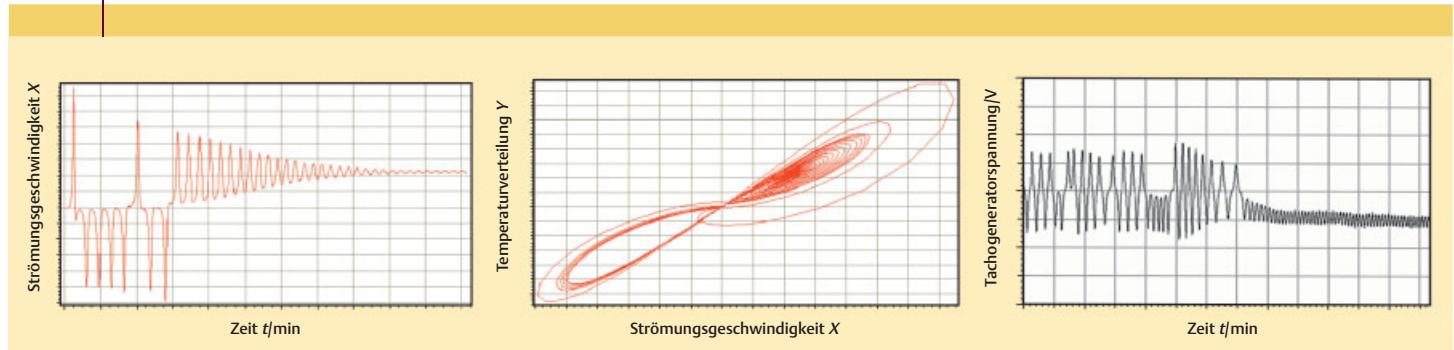
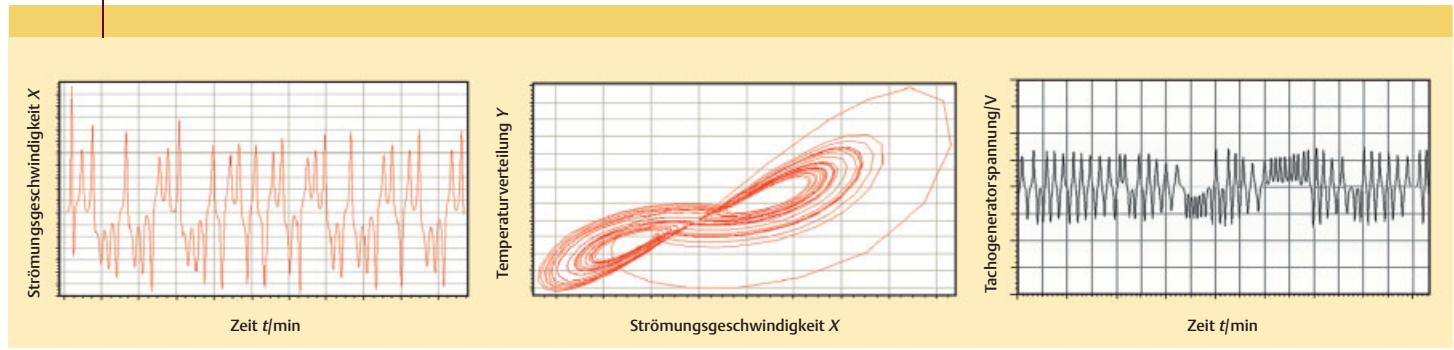


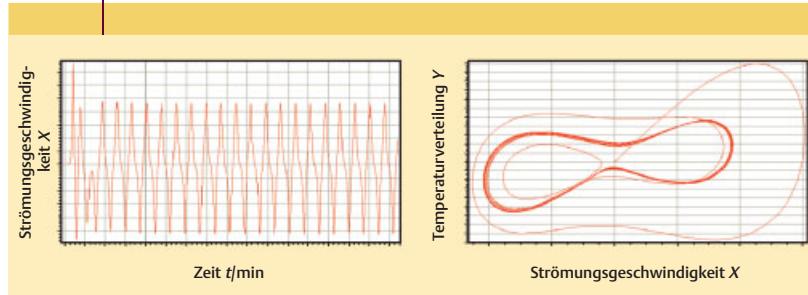
ABB. 8 | CHAOS



**Abb. 6** Die Schwankungen klingen langsam ab ( $R = 10$ ). Die einmal eingeschlagene Drehrichtung bleibt erhalten. Rechts: Stabile Rotation des Wasserrades gegen den Uhrzeigersinn ( $R_E \approx 10$ ).

**Abb. 7** Chaotischer Einschwingvorgang im vorchaotischen Parameterbereich ( $R = 16$ ). Die Transienten bewegen sich zunächst in Auswärtsspiralen um den einen Fixpunkt, ehe sie sich dann dem anderen zuwenden. Erst wenn sie bei einem dieser Wechsel einem der Fixpunkte nahe genug kommen, werden sie von diesem angezogen und bewegen sich spiralförmig auf ihn zu. Rechts: Vorturbulenter Einschwingvorgang des Wasserrades ( $R_E \approx 16$ ).

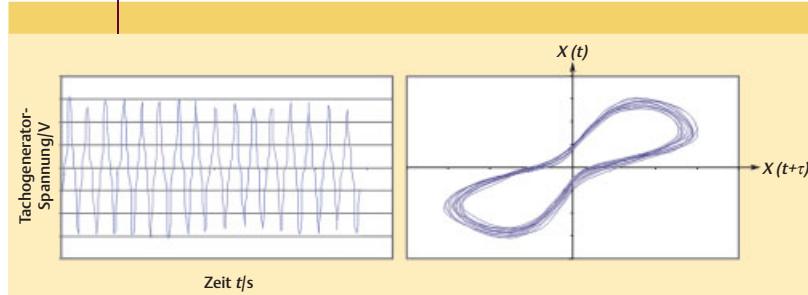
**Abb. 8** Die Zeitreihe zeigt eine chaotische Bewegung (links). Der Zustandsraum zeigt das typische Bild eines Lorenz-Attraktor (die Vorstufe war bereits in Abbildung 8 zu sehen): Die Transienten umrunden die beiden instabilen Fixpunkte außerhalb des Ursprungs in unregelmäßigem Wechsel. Die Trajektorie nähert sich ihnen an, ohne ihnen zu nahe zu kommen. Stets schaukeln sich die Schwankungen zu einer Richtungsumkehr auf und ein ähnliches, aber nicht vorhersagbares Spiel wiederholt sich am anderen Fixpunkt ( $R = 29$ ). Rechts: Chaotische Zeitreihe des Wasserrades ( $R_E \approx 29$ ).

**ABB. 9 | REGULÄRE SCHWINGUNGEN I**

Bei  $R = 100$  treten periodische Schwankungen mit Richtungsänderungen auf:  
Das System schwingt periodisch.

dert in unvorhersagbarer Weise den Drehsinn (Abbildung 8 rechts).

Handelt es sich bei dieser Bewegung um das von den Lorenz-Gleichungen erzeugte Chaos? Um diese Frage befriedigend zu beantworten, reicht der Vergleich der Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Diagramme nicht aus. Dazu müssen wir den chaotischen Attraktor aus den *experimentell* gemessenen  $X$ -Werten rekonstruieren. Um nicht Äpfel mit Birnen zu vergleichen, rekonstruieren wir auch aus den *numerisch* berechneten  $X$ -Werten den Attraktor. Der Vergleich der beiden rekonstruierten Attraktoren zeigt dieselbe Topologie und spricht für eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment (Abbildung 4).

**ABB. 10 | REGULÄRE SCHWINGUNGEN II**

Bei sehr starkem Wasserzufluss schwingt das Wasserrad periodisch.

### Reguläre Schwingungen

Die weitere Erhöhung von  $R$  führt zunächst zu keiner weiteren Verhaltensänderung des Systems, es bleibt beim Chaos. Wie schon angedeutet, fällt das System dann bei einem sehr hohen Wert von  $R = 100$  in ein reguläres Verhalten zurück – diesmal jedoch in periodische Schwingungen anstelle von Drehungen (Abbildung 9).

Wer bei den hohen Wasserströmen die Behälter in abrupten Wechseln ihren chaotischen Tanz vollführen sieht, kann sich kaum vorstellen, wie das Wasserrad bei einer weiteren Steigerung des Wasserstroms wieder den „Dreh“ zu einer regulären Schwingung hin bekommt. Und dennoch passiert genau das: Wie von der Theorie vorhergesagt, beginnen sich im Experiment die fast überbordenden Behälter bei sehr hohem Wasserzulauf regelmäßig zu heben und zu senken, also auf und ab zu schwingen (Abbildung 10). Die Schwingung bleibt auch bei weiterer Erhöhung des Wasserstroms solange stabil, bis das Wasser über den Rand der Behälter fließt und das System damit den Gültigkeitsbereich des Modells verlässt.

In Veröffentlichungen zum Lorenz-System wird die Bewegungsfigur der periodischen Schwingung oft gar nicht diskutiert – vermutlich, weil in diesem Parameterbereich das Lorenz-System nicht mehr als Modell der Bénard-Konvektion gelten kann.

### Auf geordnetem Weg ins Chaos

Obwohl sich nicht alle Bewegungsfiguren des Lorenz-Modells anhand des Wasserrades experimentell reproduzieren lassen, können am Lorenz-System fast alle wichtigen nichtlinearen Phänomene demonstriert und untersucht werden. Einige Beispiele haben wir hier vorgestellt: globale Bifurkationen wie die Hopf-Bifurkation oder Übergänge ins Chaos wie die Blue-Sky-Katastrophe. Ebenfalls grundlegend wichtig und mit dem Wasserrad gut demonstrierbar sind globale Bifurkationen wie die homokline und die heterokline Verbindung und andere Übergänge ins Chaos, zum Beispiel das Feigenbaum-Szenario oder der intermittierende Übergang [5, 6]. Einige der hier dargestellten Inhalte können sicherlich nicht unmittelbar in den schulischen Physikunterricht übernommen werden. Mit seinen detaillierten Tipps zum Experiment und zu physikalischen Denk-

kender Winkelgeschwindigkeit und wechselt häufiger seine Drehrichtung, bevor es sich auf eine stationäre, aber immer noch leicht schwankende Drehbewegung einpendelt. Der Drehsinn dieser sich letztlich einstellenden Bewegung kann nicht vorhergesagt werden (Abbildung 7 rechts).

### Chaos

Die beiden instabilen Grenzzyklen nähern sich mit weiter wachsendem  $R$  immer mehr den zugehörigen Fixpunkten an, bis sie mit diesen bei  $R = 19,5$  zusammenfallen. Dieser Fall heißt Hopf-Bifurkation [6]. Jenseits dieses Parameterwertes ist es auf keine Weise mehr möglich, zu einer regulären Drehung zu gelangen. Eine Vorhersage des Trajektorienverlaufs ist unmöglich geworden. Während die Zeitreihe keine Struktur mehr erkennen lässt, ziehen die Trajektorien im Zustandsraum in divergierenden Spiralen eine achterbahnförmige Spur um die nunmehr instabilen Fixpunkte, ohne sie je zu erreichen. In unregelmäßiger Folge und Anzahl der Umdrehungen umrunden sie mal den einen, mal den anderen Fixpunkt. Dabei zeichnen sie ein filigranes, blattartiges Gebilde, das eine unendlich feine „Blätterteigstruktur“ besitzt. Mit dieser fraktalen Eigenschaft stellt der Lorenz-Attraktor ein Zwischending zwischen Kurve und Fläche dar (Abbildung 8). Auch im Experiment stellt sich oberhalb eines gewissen kritischen Wertes für den Wasserzufluss keine stationäre Drehbewegung mehr ein. Das Rad dreht sich mit schwankender Geschwindigkeit und än-

modellen soll dieser Beitrag vor allem eine Fülle an Informationen bieten, auf denen ein Unterricht aufgebaut werden kann.

### Zusammenfassung

Modellsysteme können Schülern die Grundlagen der nichtlinearen Physik anschaulich vermitteln. Sie schlagen so einen Bogen von der Schulphysik zur aktuellen Forschung. Ein solches Modellsystem ist das chaotische Wasserrad, das Lehrer auf einfache Weise für den Schulunterricht nachbauen können. Im Wesentlichen steuert der Zufluss des Wassers das Verhalten des Wasserrads. Wächst er, so durchläuft das Rad von der geordneten, gleichförmigen Drehung bis zum Chaos verschiedene Phasen von Bewegungsfiguren. Das Experiment kann grundlegende Modelle und Begriffe der Chaostheorie demonstrieren: lokale und globale Bifurkationen und verschiedene Übergänge ins Chaos.

### Stichworte

Nichtlineare Physik, nichtlineare Dynamik, Bénard-Konvektion, Lorenz-System, Lorenz-Attraktor, Chaos, Chaostheorie, lokale Bifurkation, Hopf-Bifurkation, Stimmgabel-Bifurkation, heterokline Verbindung, globale Bifurkation, Blue-Sky-Katastrophe, Schulexperiment, Physik-Didaktik.

### Danksagung

Wir bedanken uns bei Jutta Wieching und Oliver Busse, die im Rahmen Ihrer Examensarbeiten das chaotische Wasserrad experimentell und numerisch untersucht haben.

### Literatur

- [1] G. Ahlers et al., Physik Journal **2002**, 2, 31.
- [2] E. N. Lorenz, J. Atmosph. Sciences **1963**, 20, 130.
- [3] A. J. Lichtenberg, Regular and Stochastic Motion. Springer Verlag, Heidelberg und Berlin 1983.
- [4] C. Sparrow, The Lorenz Equations. Springer Verlag, New York 1982.
- [5] H. Haken, Synergetik. Springer Verlag, Heidelberg und Berlin 1983.
- [6] H. J. Schlichting et al., Physik und Didaktik **1991**, 3, 196.
- [7] J. Argyris et al., Die Erforschung des Chaos. Vieweg Verlag, Braunschweig und Wiesbaden: 1995.
- [8] J. M. T. Thomson, H. B. Steward, Nonlinear Dynamics and Chaos. John Wiley & Sons, New York 1986.
- [9] H. D. I. Abarbanel, Analysis of Observed Chaotic Data. Springer Verlag, New York 1996.
- [10] V. Nordmeier, H. J. Schlichting, Praxis der Naturwissenschaften – Physik **1996**, 1, 45.

### DAS LORENZ-SYSTEM

Lorenz ging von einer Fluidschicht mit der Dicke  $h$  aus, die der Schwerkraft unterliegt. Außerdem ist sie oben und unten den konstanten Temperaturen  $T_1$  und  $T_0 = T_1 + \Delta T$  ausgesetzt. Er gelangte durch Kombination von Navier-Stokes-Gleichung, Wärmeleitungsgleichung und Kontinuitätsgleichung zu einem sehr einfachen System nichtlinearer Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} &= RX - Y - XZ \\ \dot{Z} &= XY - bZ.\end{aligned}$$

$\sigma$  beschreibt das Verhältnis der Wärme, die die Reibung in der Strömung erzeugt, zur Wärme, die aus dem System abfließt (Prandtl-Zahl). Bei der Untersuchung des Lorenz-Systems ist es üblich, den Wert für kaltes Wasser ( $\sigma = 10$ ) einzusetzen.  $b$  ist ein Geometriefaktor. Er ist ein Maß für die Form der Konvektionsrollen. Meist wird er auf den Wert  $b = 3/8$  gesetzt. Er steht dann für den kleinst möglichen Wert der Temperaturdifferenz  $\Delta T$ , bei dem Konvektion einsetzt. In diesem Beitrag gilt der Spezialfall  $b = 1$ .  $R \sim \Delta T$  ist ein Maß für die Temperaturdifferenz. Es ist so normiert, dass Konvektion bei  $R = 1$  einsetzt.

Die auftretenden *Koordinaten* haben folgende Bedeutung:

$X(t)$  ist ein Maß für die Strömungsgeschwindigkeit in den Konvektionsrollen:

$$v(x, z, t) \sim X(t),$$

insbesondere also

$$X = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

Das Vorzeichen von  $X$  beschreibt den Umlaufsinn der Konvektionsströmung.  $Y(t)$  und  $Z(t)$  beschreiben die Abweichung des Temperaturfeldes von dem Fall, der sich bei reiner Wärmeleitung einstellt (homogen in  $X$ - und linear in  $Z$ -Richtung).  $Y(t)$  beschreibt insbesondere die horizontale Temperaturverteilung. Es ist ein Maß für den Temperaturunterschied zwischen aufsteigenden und absinkenden Volumenelementen.

Im Fall  $Y = 0$  ist der Temperaturverlauf  $T$  homogen in  $X$ -Richtung. Der Fall  $X \cdot Y > 0$  besagt, dass aufsteigende Volumenelemente wärmer als absinkende sind.  $Z(t)$  beschreibt zusätzlich die vertikale Abweichung von der Linearität.

### Die Autoren



Volkhard Nordmeier ist Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Münster.



Hans-Joachim Schlichting ist Professor an der Universität Münster und ständiger Autor der Rubrik „Spielwiese“.

### Anschrift

Dr. Volkhard Nordmeier, Prof. Dr. Hans Joachim Schlichting, Institut für Didaktik, Universität Münster, Wilhelm-Klemm-Straße 10, 48149 Münster. Nordmeier@uni-muenster.de