

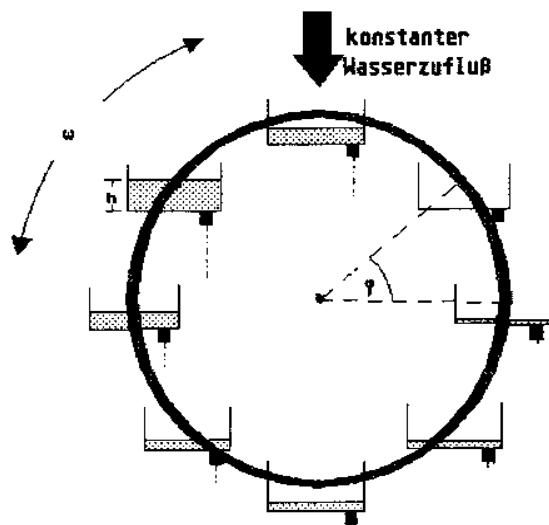
# Chaos beim Wasserrad- ein einfaches mechanisches Modell für das Lorenzsystem

H. Joachim Schlichting

## Beschreibung des Systems

Das hier untersuchte Wasserrad ist ein dissipatives, nichtlineares System, das durch einen Antrieb in periodische und nichtperiodische Bewegungen versetzt werden kann. Im Unterschied zu den vorher beschriebenen Systemen ist der Antrieb selbst jedoch nicht periodisch, dem System kann daher von außen kein Zeitrhythmus aufgeprägt werden. Das Wasserrad muß seinen Rhythmus selbst finden, indem es die erzwungenen Bewegungen mit den Systemparametern und dem Energieangebot in Einklang bringt.. Man nennt ein solches System autonom.

Das chaotische Wasserrad ist eine experimentell



**Abb: 1:** Schematische Darstellung des Wasserrades

handhabbare Realisation des Lorenz-Systems, das nicht nur das erste, sondern auch das am besten untersuchte Modell eines chaotischen Systems darstellt. Edward Lorenz leitete dieses Modell zur Beschreibung des meteorologischen Phänomens ab, daß Schichten von Flüssigkeiten und Gasen spontan regelmäßige Konvektionsmuster ausbilden können, wenn die Temperaturdifferenz zwischen Ober- und Unterseite zwischen kritischen Werten liegt

## Die Bewegungsgleichungen

Die Bewegung des Rades, ausgedrückt durch die zeitliche Änderung des Drehimpulses, wird zum einen durch das Drehmoment bestimmt, das der Wassergehalt  $m(\varphi)$  eines an der Felge (Radius  $r$ ) angebrachten Behälters an der Stelle  $\varphi$  (gegen die Horizontale gemessen) ausübt. Dem wirkt zum anderen ein Drehmoment aufgrund der als proportional zur Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  unterstellten Reibung entgegen. Da für den Antrieb die gesamte auf die einzelnen Behälter verteilte Wassermasse ausschlaggebend ist, denken wir uns die Wassermasse als kontinuierlich über alle Winkel  $\varphi$  verteilt. Diese Vereinfachung kommt der Annahme gleich, das Rad besitze unendlich viele Behälter mit unendlich vielen Abflüssen. Unter Vernachlässigung der Masse des Rades erhält man dann:

$$\frac{d(r^2 \bar{m} \mathbf{w})}{dt} = -gr \frac{m \cos(j)}{ -k \mathbf{w}} \quad (1)$$

### Trägheit Antriebskraft Reibung

Dabei ist  $k$  eine Reibungskonstante und  $g$  die Erdbeschleunigung. Der Strich über den Symbolen bezeichnet die Integration über das gesamte Winkelintervall.

Die zeitliche Änderung der Massenverteilung wird durch die Differenz aus Massengewinn und Massenverlust der Behälter bestimmt. Der Verlust kann

als proportional zum Wasserinhalt  $m(\phi)$  der Behälter angesetzt werden. Die Wasseraufnahme nehmen wir als proportional zur Höhe der Gondeln bezüglich des unteren Radrandes an. Diese Näherung ist ziemlich grob, wenn das Wasser nur in der Mitte zugeführt wird, aber besser, wenn das Rad in einem gleichmäßigen Regen steht.

$$\frac{dm(\mathbf{j}^*)}{dt} = \frac{\partial m(\mathbf{j}^*)}{\partial t} + \mathbf{w} \frac{\partial m(\mathbf{j}^*)}{\partial \mathbf{j}} \quad (2)$$

## Massenänderung

$$\frac{dm(\mathbf{j})}{dt} = A(r + r \sin \mathbf{j}) - hm(\mathbf{j})$$

## Gewinn Verlust

Dabei sind  $A$  und  $h$  positive Konstanten. Integration von Gleichung (2) über den Vollwinkel

$$\frac{d\overline{m}}{dt} = 2pAr - h\overline{m} \quad (3)$$

zeigt, daß der gesamte Wasserzufluß konstant ( $=2\pi Ar$ ) ist und daß  $\bar{m}$  asymptotisch den Grenzwert  $2\pi Ar/h$  annimmt. Nimmt man an, daß sich dieser Grenzwert bereits eingestellt hat, kann man Gleichung (1) in die Form bringen:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = -\frac{kh}{2pAr^3}\mathbf{w} - \left(\frac{gh}{2pAr^2}\right) \overline{m \cos(\mathbf{j})} \quad (4)$$

Mit Hilfe von Gleichung (2) erhält man

$$\begin{aligned}
 \frac{d \overline{m \cos(j)}}{dt} &= \int \frac{d}{dt} (m \cos(j)) dj \\
 &= \int (-m w \sin(j) + \frac{dm}{dt} \cos(j)) dj \\
 &= -w \overline{m \sin(j)} - h \overline{m \cos(j)}
 \end{aligned} \tag{5}$$

und ebenso

$$\frac{d \overline{m \sin j}}{dt} = w \overline{m \cos j} - h \overline{m \sin j} + p Ar, \quad (6)$$

## Mit der linearen Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} t' &= ht, \quad X = -\frac{1}{h}w, \quad Y = \frac{gr}{kh} \overline{m \cos j}, \\ Z &= -\frac{gr}{kh} \overline{m \sin j} + \frac{g \mathbf{p} A r^2}{kh^2} \end{aligned}$$

erhält man folgenden Satz von Differentialgleichungen,

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \mathbf{s}(Y - X) \\ \dot{Y} &= RX - Y - XZ \\ \dot{Z} &= XY - Z\end{aligned}\quad \text{mit } \begin{cases} \mathbf{s} = \frac{k}{2pAr^3} \text{ und} \\ R = \frac{g p A r^2}{k h^2} \end{cases}$$

Dabei bedeutet  $\cdot$  die Differentiation nach der transformierten Zeit  $t'$ .

Dieses Differentialgleichungssystem stellt einen Spezialfall des sogenannten Lorenz-Systems dar, welches eines der am meisten untersuchten chaotischen Systeme ist. Nach einer kurzen Herleitung der Lorenz-Gleichungen werden wir mit ihrer Hilfe die Verhaltensm鰎glichkeiten des Wasserrades simulieren.

ren und anschließend mit den experimentellen Ergebnissen vergleichen.

## Bewegungsfiguren des Wasserrads

Um einen systematischen Überblick über die Verhaltensmöglichkeiten des Wasserrades zu erlangen, muß der Kontrollparameter durch den für das System relevanten Wertebereich "gefahren" werden. Dabei ist es zweckmäßig das Rad aus der Ruhe zu starten. Mit zunehmendem Wasserzufluß stellen sich nacheinander die folgenden Bewegungsfiguren ein:

Ruhe: Bei sehr kleinem Zufluß rinnt das Wasser durch die Behälter hindurch, ohne daß sich an der Ruhestellung des Rades etwas ändert. Selbst wenn man dem Rad einen kurzen Anstoß gibt, kommt es sofort wieder zur Ruhe. Nimmt der Zufluß zu, so kann das Wasser durch die relativ kleine Öffnung in den Behältern nicht so schnell wieder abfließen, und die Wasserhöhe steigt etwas an, zuerst in den oberen Behältern. Solange die dadurch bedingte Kopflastigkeit des Systems durch die Reibung ausgeglichen wird, bleibt das Rad in Ruhe bzw. kommt zur Ruhe.

Drehung: Erst wenn der Zufluß einen ersten kritischen Wert überschreitet, führt die Kopflastigkeit zu einer labilen Situation: Kleinste zufällige Schwankungen in der Füllhöhe der Behälter genügen, um die Symmetrie des ruhenden Rades zu brechen. Es beginnt, sich in die eine oder andere Richtung zu drehen. Und wenn es erst einmal rotiert, dann bleibt es auch dabei: Der die Drehrichtung "auswürfelnde" Zufall wird gewissermaßen konserviert.

Dreht sich das Rad beispielsweise nach links, dann bewegen sich gerade die stärker gefüllten Behälter auf der linken Seite des Rades herunter und die weniger gefüllten, weil zumindest teilweise wieder leer-gelaufenen, Behälter auf der rechten Seite herauf. Dementsprechend ist aufgrund der größeren Masse auf der linken Radseite das linksdrehende Moment stets größer als das rechtsdrehende Moment. Folglich stellt sich (beim hier vorausgesetzten relativ geringen Zustrom) eine stabile Drehbewegung ein. Kleine Schwankungen in der Wasserhöhe der Behälter und damit im Verhältnis der Drehmomente zueinander werden stets wieder abgebaut, weil mit dem Wasserstand auch der Abfluß zunimmt.

Drehung mit Hindernissen: Wird der Wasserzulauf weiter hochgeregelt, so stellt sich das stationäre Gleichgewicht zwischen Zufluß und Abfluß bei einem entsprechend höheren Wasserstand in den Behältern ein. Solange dabei ein gewisser zweiter kritischer Wert nicht überschritten wird (siehe unten), landet das Rad zwar stets wieder in einer stationären, nun aber schnelleren, Drehbewegung - aller-

dings mit zunehmendem Zufluß immer unwilliger: Die Bewegung wird zu Beginn, als Folge eines Wechsels zwischen starken Beschleunigungen und Abbremsungen, nicht nur immer ungleichförmiger, sondern braucht auch immer mehr Zeit, um die Figur der stationären Drehung zu erreichen.

Wodurch wird diese Ungleichförmigkeit bedingt? Mit wachsendem Zustrom nimmt das aus der Ruhe startende System zunächst viel Wasser auf, wodurch das linksdrehende Moment und infolgedessen die Drehgeschwindigkeit eine starke Zunahme erfahren. Dadurch geraten zum einen die Behälter weiter in den rechten Bereich des Rades, bevor sie wesentlich an Wasser eingebüßt haben. Zum anderen verringert sich die Verweilzeit der Behälter im Zustrombereich, wodurch die Wasseraufnahme verringert wird. Ersteres führt zu einer Zunahme des rechtsdrehenden, letzteres zu einer Abnahme des linksdrehenden Moments, beides zusammen also zu einer Abbremsung des Rades. Die unmittelbare Folge davon ist aber ein erneutes Anwachsen der Drehgeschwindigkeit, wenn auch auf einen kleineren Wert als beim vorhergehenden Umlauf.

Drehung mit Richtungswechsel: Vergrößert man den Zulauf weiter, so kommt es zur ersten Richtungsumkehr des Rades: Die stark angefüllten Behälter des linken Radbereichs sausen dann derart schnell in den rechten Bereich, daß im linken Bereich nicht rechtzeitig ein genügendes Gegengewicht geschaffen werden kann, um die schweren Behälter über den Umkehrpunkt zu befördern. Aber nach dem bewährten Prinzip "einmal ist einmal" mündet auch diesmal die Bewegung in eine stationäre Drehung ein, allerdings mit umgedrehtem Drehsinn.

Chaos: Erst wenn die Zuflußrate einen dritten kritischen Wert überschreitet, leitet die Richtungsumkehr eine neue Bewegungsfigur ein. Weder bleibt es bei einer einmaligen Änderung der Drehrichtung, noch kommt es auch nach längerer Zeit wieder zu einer stationären Drehung.

Naiverweise würde man erwarten, daß sich das System nach diesem Symmetriebruch auf eine gleichförmige Schwingung einpendelt, bei der sich die Richtungsumkehr periodisch wiederholt. Dies ist vorerst jedoch nicht der Fall. Das Rad nimmt stattdessen eine Bewegungsfigur ein, die man nicht einfach beschreiben kann, weil auch nach längerer Zeit, also im Endzustand, völlig unregelmäßige Wechsel zwischen ungleichförmigen Schwingungen und Drehungen auftreten, und die daher mit einem Wort als chaotisch zu bezeichnen ist.

Günstige Bedingungen für Chaos: Qualitativ kann man nicht mehr veranschaulichen, warum sich keine regelmäßige Bewegungsfigur mit Richtungswechseln, sondern eine chaotische einstellt. Wir können

uns aber plausibel machen, warum gerade nach diesem Symmetriebruch Chaos auftreten kann.

Wesentlich für das Entstehen von Chaos ist das Vorhandensein von sensitiven Punkten [3], an denen kleinste Störungen qualitative Verhaltensänderungen bewirken können. Im vorliegenden Fall ist der "Überschlagspunkt" des Rades sensitiv. An ihm wird jeder Behälter vorbeigeführt und dahingehend überprüft, ob er passieren kann oder "zurückgewiesen" werden muß. Im regulären Parameterbereich ist die Überprüfung eine reine Formalität, denn die jeweilige Bewegungsfigur ist so eindeutig determiniert, daß z.B. kleine Unterschiede in der Masse, die die Behälter durch Zufallsschwankungen während der Rundreise stets annehmen, keine Rolle spielen. Demgegenüber sind in gewissen Parameterbereichen selbst kleinste Schwankungen entscheidend dafür, ob es zum Überschlag oder zur Bewegungsumkehr kommt: Dadurch wird der Bewegungsbahn gewissermaßen durch den den Schwankungen anhaftenden Zufall bestimmt, was nur zu einem chaotischen, unvorhersehbaren Verhalten führen kann.

Schwingung: Steigert man den Wasserzuflauf noch weiter, so wird schließlich doch noch alles wieder regulär: Die Bewegung endet in einer stabilen regulären Schwingung.

## Dynamik des Wasserrads

Ob der soeben beschriebene Symmetriebruch, zu dem sich die Drehung aufgrund der Zunahme des Wasserzuflusses aufgeschaukelt hat, den Beginn einer regulären oder einer chaotischen Bewegungsfigur einläutet, kann- wie gesagt- durch rein qualitative Überlegungen im Anschauungsraum nicht mehr ausgemacht werden. Die Beantwortung der Frage setzt eine quantitative Analyse des Verhaltens des Wasserrades voraus.

Genau genommen - und das ist einer der zentralen Punkte der Chaosforschung - wird ein sehr viel geringerer Anspruch erhoben: Es bleibt bei einer qualitativen Betrachtung. Allerdings findet sie nicht im Anschauungsraum sondern im Zustandsraum (vgl. z.B.[3]) statt. Das setzt zwar die quantitative Lösung der Bewegungsgleichung des Wasserrads voraus, aber es genügt, daß die Bewegungsgleichungen nur die wesentlichen Merkmale des Systems erfassen. Auf Details kommt es bei der Modellierung nicht an; das Problem kann durch Näherungen stark vereinfacht werden. Im vorliegenden Fall ist die Situation deshalb besonders einfach, weil die Bewegungsgleichungen- wie oben gezeigt- auf die Lorenz-Gleichungen zurückgeführt werden können, deren Dynamik in den vergangenen Jahren ausführlich diskutiert worden ist.

## Das Lorenz-System

Der Meteorologe E. N. Lorenz [5] beschäftigte sich 1963 im Zusammenhang mit dem Problem der Wettervorhersage mit den Wärmetransportvorgängen in der Atmosphäre, die dadurch angeregt werden, daß die Luft am Erdboden erwärmt wird, oben aber in Verbindung steht mit einem Wärmereservoir niedriger Temperatur, dem Weltraum.

Wie man aus Beobachtungen von Wolkenbildungen weiß, treten dabei sowohl unregelmäßige, chaotische, als auch hochgeordnete Transportphänomene (Bénard-Konvektion) auf. Letztere zeigen sich z.B. eindrucksvoll in den sogenannten Wolkenstraßen, die eine über viele Kilometer fast translationssinvariante Struktur darstellen.

Das Phänomen wird modelliert durch die Schicht eines Fluids mit der Dicke  $h$ , die der Schwerkraft unterliegt und außerdem oben und unten den konstanten Temperaturen  $T_1$  und  $T_0 = T_1 + \Delta T > T_1$  ausgesetzt ist.

Setzt man die Konvektionsströmung als translationssinvariant ( $\partial/\partial y \equiv 0$ ) und quellenfrei ( $\Delta \cdot v = 0$ ) voraus, dann kann man ihr Geschwindigkeitsfeld als Rotation eines skalaren Potentials  $\psi(x, z, t)$  schreiben:

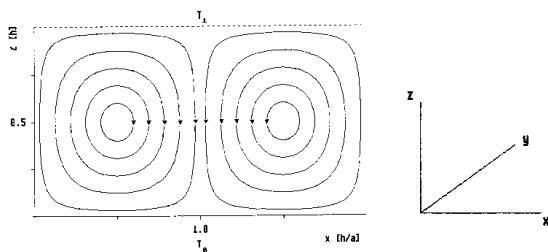


Abb. 2: Typisches Strömungsbild bei der Bénard-Konvektion

$$\begin{aligned} \Delta \cdot v &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \Leftrightarrow v(x, z, t) &= \Delta \cdot \mathbf{y}(x, z, t) e_y \\ &= \left( -\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial z}, 0, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Lorenz (siehe z.B. [6]) führte neben  $\psi$  die Variable

$$\Theta(x, z, t) = T(x, z, t) - \frac{\Delta T}{h} z \quad (8)$$

als Maß für die Abweichung des Temperaturprofils von der Linearität ein. Er entwickelte die beiden Variablen in eine doppelte Fourier-Reihe in  $x$  und  $z$  und berücksichtigte nur die drei wichtigsten Koeffizienten, eine Näherung, die sicher nur in der Nähe der kritischen Temperaturdifferenz gerechtfertigt ist, bei der das Fluid in Konvektionsbewegung gerät. Aufgrund dieser Näherung läßt sich  $\psi$  darstellen als

$$\mathbf{y}(x, z, t) \sim X(t) \sin\left(\frac{p}{h} x\right) \sin\left(\frac{p}{h} z\right), \quad (9)$$

wobei der dimensionslose Geometriefaktor  $a$  das Seitenverhältnis einer Konvektionszelle angibt. Anschaulich bedeutet das die Beschränkung auf Lösungen mit dem folgenden Strömungsbild (für  $X \neq 0$ ):

Eine solche Konvektionsstruktur stellt sich ein, wenn eine Flüssigkeits- oder Gasschicht von unten geheizt wird. Zunächst wird die Wärme durch

Wärmeleitung auf die Flüssigkeitsschicht übertragen, durch Wärmeleitung an die Flüssigkeitsoberfläche transportiert und dort abgegeben. Übersteigt der Wärmestrom jedoch eine bestimmte kritische Größe, so wird die Symmetrie des Wärmetransportvorgangs plötzlich gebrochen. Neben der Wärmeleitung tritt der sehr viel effektivere Mechanismus der Konvektion auf. Der Auftrieb der erwärmten und daher spezifisch leichteren Flüssigkeit wird dann auf einmal größer als die die Bewegung hindernde Reibung und führt zum Einsetzen einer Bewegung. Die aufsteigende wärmere wird durch nachströmende kältere Flüssigkeit ersetzt, die so dann ihrerseits erwärmt wird, aufsteigt, an der Flüssigkeitsoberfläche Wärme an die kältere Umgebung abgibt, wieder absinkt, bis sie schließlich, erneut erwärmt, den Kreis abermals durchläuft. Bei passenden Randbedingungen organisiert sich das Kreislaufgeschehen in einem hochgeordneten Muster von Konvektionsrollen. Der Drehsinn dieser Rollen wird durch kleinste zufällige Bewegungen (Fluktuationen) während des Symmetriebruchs festgelegt.

Lorenz setzte seinen Ansatz für  $\omega$  und  $\Theta$  in ein Differentialgleichungssystem ein, das er durch Kombination von Navier-Stokes-Gleichung, Wärmeleitungsgleichung und Kontinuitätsgleichung erhielt. Er gelangte dadurch zu dem bereits oben erwähnten System nichtlinearer Differentialgleichungen, den sogenannten Lorenz-Gleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= s(Y - X) \\ \dot{Y} &= RX - Y - XZ \\ \dot{Z} &= XY - bZ\end{aligned}\tag{10}$$

Dabei haben die auftretenden Konstanten folgende Bedeutung:

- $\sigma$  = Verhältnis der in der Strömung durch Reibung erzeugten Wärme zur fortgeleiteten Wärme (Prandtl-Zahl). Bei der Untersuchung des Lorenz-Systems ist es üblich, den Wert für kaltes Wasser ( $\sigma = 10$ ) einzusetzen.
- $b$  = Geometriefaktor, der ein Maß für die Form der Konvektionsrollen ist. Meist wird er auf den Wert gesetzt, für den Konvektion beim kleinstmöglichen Wert von  $\Delta T$  einsetzt ( $b = 8/3$ ).
- $R \sim \Delta T$  ist ein Maß für die Temperaturdifferenz, das so normiert ist, daß Konvektion bei  $R = 1$  einsetzt.

Die auftretenden Koordinaten haben folgende Bedeutung:

- $X(t)$  ist ein Maß für die Strömungsgeschwindigkeit in den Konvektionsrollen:
  - $v(x, z, t) \sim X(t)$ , insbesondere also  $X = 0 \Leftrightarrow v = 0$ .
  - Das Vorzeichen von  $X$  beschreibt den Umlaufsinn der Konvektionsströmung.
- $Y(t)$  und  $Z(t)$  beschreiben die Abweichung des Temperaturfeldes von dem Fall, der sich bei reiner Wärmeleitung einstellt (homogen in  $X$ - und linear in  $Z$ -Richtung).
- $Y(t)$  beschreibt insbesondere die horizontale Temperaturverteilung. Es ist ein Maß für den Temperaturunterschied zwischen aufsteigenden und absinkenden Volumenelementen.
  - $Y=0 \Rightarrow T$  ist homogen in  $x$ -Richtung.
  - $X \cdot Y > 0 \Rightarrow$  Aufsteigende Volumenelemente sind wärmer als absinkende.
- $Z(t)$  beschreibt zusätzlich die vertikale Abweichung von der Linearität.

## Ähnlichkeiten zwischen Wasserrad und Bénard-Konvektion

Die Äquivalenz zwischen Lorenzsystem und Wasserrad liegt auf der Hand:

Der Antrieb der Bewegung besteht in der Gewichtszunahme von

Volumenelemente infolge von Wärmeabgabe bzw. Wasseraufnahme in Anwesenheit der Schwerkraft.

Der Wärmeabgabe an der Oberfläche beim Lorenz-System entspricht beim Wasserrad der Wasserzufluß von oben. Die Wärmeleitung innerhalb der Flüssigkeit ist der Wasserabgabe von oberen Behältern in untere, die Wärmeaufnahme an der Flüssigkeitsunterseite ist dem Wasserverlust durch die Abflußlöcher des Rades in das untere

Auffangbecken analog. Bei geringer Temperaturdifferenz, entsprechend einem schwachen Regen, tut sich hier wie dort nichts. Die Flüssigkeit bzw. das Rad bleiben in Ruhe. Der Symmetriebruch, durch den die Flüssigkeit vom Zustand der Ruhe in den der Bewegung übergeht, findet sich ebenfalls beim Wasserrad wieder. Die sich infolgedessen einstellende Drehbewegung des Wasserrades beschreibt bis in Details das Verhalten einer Konvektionswalze.

Weitergehende Analogien gibt es allerdings nicht mehr. Zwar geht auch die Bénard- Konvektion bei genügender Erhöhung der Temperatur in Turbulenz über, aber die Tiefenstruktur dieser Turbulenz hat nichts mehr mit den wohlorganisierten chaotischen Vorgängen zu tun, die wir beim Wasserrad beobachten und die schließlich durch ein reguläres Schwingen abgeschlossen werden. Das ist auch nicht verwunderlich. Während das Lorenz-Modell für die Beschreibung der Bénard- Konvektion nur näherungsweise gültig ist (in der Umgebung von  $R = 1$ ), gibt es - wie die obige Herleitung zeigt - eine solche Einschränkung für ein Wasserrad mit unendlich vielen Behältern nicht. Da ein solches theoretisches Wasserrad von einem mit nur wenigen Behältern nicht grundsätzlich verschieden ist, können wir erwarten, daß die Verhaltensmerkmale von Wasserrad und Lorenz-System qualitativ übereinstimmen.

## Der Lorenz-Attraktor

Bei der Untersuchung des Lorenz-Systems werden meist die Parameter  $\sigma$  ( $= 10$ ) und  $b$  ( $= 8/3$ ) konstant gehalten und das Verhalten des Systems in Abhängigkeit vom Parameter  $R$  untersucht. Der Vergleich von Gl. (7) und (10) zeigt jedoch zunächst, daß beim Wasserrad  $b = 1$  gesetzt werden muß. Interessiert man sich für das Verhalten des Wasserrades in Abhängigkeit vom Wasserzufluß  $A$  bei konstantem Reibungskoeffizienten und unveränderten Ausflußlöchern ( $h = \text{const}$ ,  $k = \text{const}$ ), dann kann man die beiden anderen Parameter  $s$  und  $R$  nicht unabhängig voneinander variieren:

$$s \sim \frac{1}{A}, R \sim A \Rightarrow sR = \text{const} \left( = \frac{g}{2h^2 r} \right)$$

Um beim Einsetzen des chaotischen Verhaltens ähnliche Parameterwerte zu haben wie üblich, wählen wir

$$\sigma R = 240$$

Das entspricht einer Zeitkonstante für den Wasseerausfluß von  $\tau = 1/h = 3.5s$ .

Die qualitative Übereinstimmung im chaotischen Verhalten der beiden Systeme läßt sich nur schwer durch einen direkten Vergleich der experimentellen und theoretischen Daten erkennen. Hier kann allenfalls die "Form" der Geschwindigkeit-Zeit-Diagramme entsprechende Hinweise geben. Charakteristischer sind indessen die sogenannten Attraktoren im Zustandsraum des Systems, die das Endverhalten in einem bestimmten Parameterbereich repräsentieren.

## Einfache Eigenschaften der Lorenz-Gleichungen

Im folgenden werden deshalb die Ergebnisse, die aus einer Auswertung der Lorenz-Gleichungen hervorgehen, im Zustandsraum dargestellt und den im Anschauungsraum auftretenden Bewegungen zugeordnet. Einige einfache Eigenschaften lassen sich bereits analytisch ableiten:

- Das Gleichungssystem spiegelt die Symmetrie des zugrundeliegenden physikalischen Problems gegenüber einer Änderung des Drehsinns:

$$\begin{aligned}(X, Y, Z) &\rightarrow (-X, -Y, Z) \Rightarrow \\(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}) &\rightarrow (-\dot{X}, -\dot{Y}, \dot{Z})\end{aligned}$$

Zustände, die sich nur im Rotationssinn unterscheiden, sind gleichwertig.

- Das System hat folgende Fixpunkte:

$$FP1 = (0,0,0);$$

$$FP2,3 = (\sqrt{b(R-1)}, \sqrt{b(R-1)}, R-1)$$

- $R < 1$ : Nur FP1 existiert und ist stabil: Bei niedriger Temperaturdifferenz ist die reine Wärmeleitung bzw. der Ruhezustand des Rades das einzige mögliche Endverhalten. Das Fluid bzw. das Rad bleibt in Ruhe, bzw. kommt zur Ruhe, wenn es anfänglich in Bewegung war.
- $1 < R < \sigma(\sigma+b+3)/(\sigma-b-1)$ : FP1 ist instabil, aber FP2 und FP3 sind stabil. Wegen  $\sigma R = \text{const} = c$  und  $b = 1$  läßt sich der zweite Teil der Bedingung umschreiben und numerisch auswerten:

$$2R^3 - cR^2 + cR + c^2 > 0 \Leftrightarrow R < 19,5 \text{ oder } R > 113,5$$

Anzumerken ist, daß wegen der Kopplung zwischen  $\sigma$  und  $R$  im Unterschied zum üblicherweise behandelten Fall des Lorenzmodells ( $\sigma = 10$ ,  $b = 3/8$ ) bei

sehr hohen Wasserströmen ( $R > 113,5$ ) die Fixpunkte wieder stabil werden. Bei mittleren und sehr hohen Wasserströmen nimmt das Rad eine stabile Rollbewegung ein.

- $R > \sigma(\sigma+b+3)/(\sigma-b-1) \Leftrightarrow 19,5 < R < 113,5$ : Alle drei Fixpunkte sind instabil. Bei großen Wasserströmen unterhalb einer Grenze von  $R = 113,5$  kann das Endverhalten nicht ohne weiteres vorhergesagt werden (Chaos).

## Simulation des Systemverhaltens

Weitere Aussagen sind analytisch schwierig zu gewinnen. Das Differentialgleichungssystem wird daher numerisch integriert und das Systemverhalten grafisch dargestellt. Bei der Darstellung der zeitlichen Entwicklung genügt es, sich auf  $X(t)$ -Diagramme zu beschränken, weil der Koordinate  $X$  die anschaulichste Bedeutung zukommt und außerdem die  $Y(t)$ - und  $Z(t)$ -Diagramme sehr ähnlich aussehen. Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten wird als Trajektorie im Zustandsraum dargestellt. Um bei diesen Diagrammen die Vorstellung der räumlichen Lage der Orbits zu erleichtern, können Projektionen der Bahn auf die  $(X, Y)$ - und die  $(Y, Z)$ -Koordinatenebenen gepunktet mitgezeichnet werden.

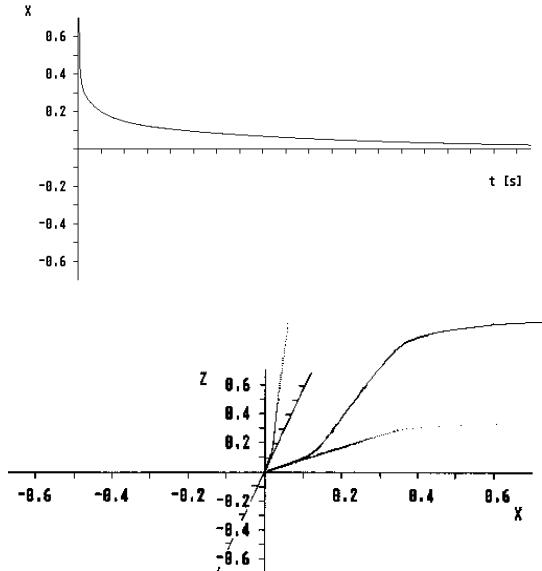
Da der Wärmeleitungszustand bzw. Ruhezustand den "natürlichen" Zustand des Systems darstellt, wählen wir in der Regel Anfangsbedingungen in der Nähe des Ursprungs, simulieren also den Beginn der Bewegung.

Die Integration wird mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung durchgeführt (PROCEDURE RungeKutta). Die Grafiken werden mit der Prozedur Plot3d erstellt.

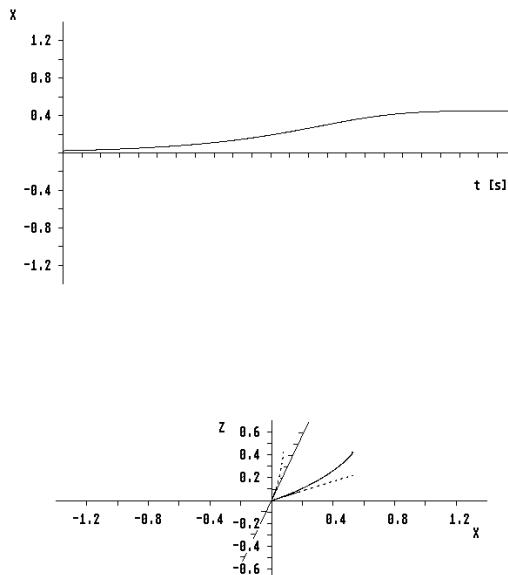
Untersuchung verschiedener Parameterbereiche:

Für  $R = 0$  ist der Ruhezustand (Ursprung des Zustandsraums) einziger Fixpunkt. Er bleibt es für Werte von  $R < 1$ , d.h. für niedrige Zstrom (Abb. 3).  $R = 1$  entspricht dem ersten kritischen Wert des Zstroms, bei dem aufgrund einer sogenannten Stimmigabelbifurkation [7] der Fixpunkt im Ursprung instabil wird und zwei neue Fixpunkte entstehen, die einer Drehung des Rades in der einen und anderen Richtung entsprechen.

Solange der Zstrom einen Wert von  $R = 1,125$  nicht überschreitet, handelt es sich um stabile Knoten: Die Trajektorien eines aus der Ruhe, also  $X = 0$  gestarteten Rades laufen je nach dem Drehsinn direkt auf einen der beiden Fixpunkte zu. Der Zustandsraum zerfällt sauber in zwei symmetrische Teile. Besteht sich eine Trajektorie erst einmal in einem Be-

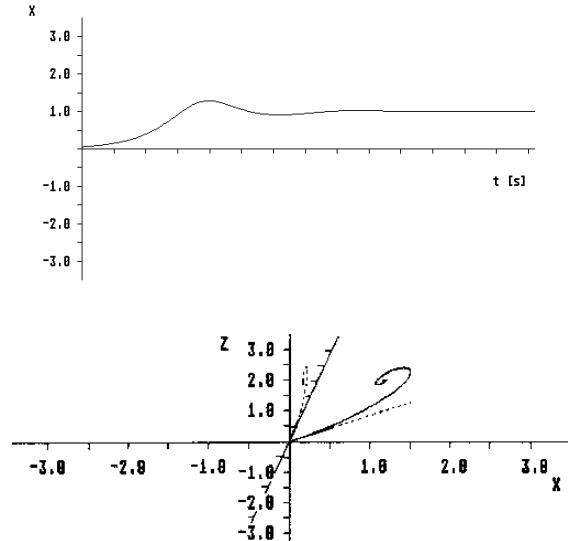


**Abb. 3:**  $R = 0.9$ : Das Wasser bzw. das Rad bleibt in Ruhe oder kommt schnell zur Ruhe, wenn es anfänglich in Bewegung war. Die Projektionen der Bahn auf die (X,Y)- und die (Y,Z)-Koordinatenebenen sind gepunktet mitgezeichnet.



**Abb. 4:**  $R = 1.2$ : Das System gerät langsam in Konvektion, verlässt also den Nullpunkt, um langsam gegen einen der beiden anderen Fixpunkte zu streben. Die Projektionen der Bahn auf (X,Y)- und (Y,Z)-Ebene sind mitgezeichnet.

reich, so bleibt sie auch darin, solange der Zulauf nicht zu groß wird. Dies entspricht dem Beibehalten der einmal eingeschlagenen Drehrichtung (Abb. 4).



**Abb. 5:**  $R = 2.0$ : Das System gerät schneller in Rotation. Zusätzlich treten zunächst Schwankungen in der Strömungsgeschwindigkeit um den nun höheren Endwert auf, die aber schnell abklingen.

Überschreitet der Zustrom den Wert  $R = 1.125$ , so wird der Fixpunkt erst nach einem Herumspiralen erreicht. Dem entspricht eine anfängliche Ungleichförmigkeit der Drehgeschwindigkeit, die sich aber mit der Annäherung an den Fixpunkt wieder abbaut (Abb. 5).

Diese Ungleichförmigkeit wird mit zunehmendem  $R$  immer ausgeprägter (Abb. 6), bis sie bei einem Wert von  $R = 11.3$  zu einer Richtungsumkehr führt. Im Zustandsraum äußert sich dies Verhalten folgendermaßen: Die zunächst in den linken Bereich hineinlaufende Trajektorie läuft bei  $R = 11.3$  asymptotisch in den Ursprung zurück (homokline Verbindung [7]). Bei Vergrößerung von  $R$  durchbricht sie die bislang "undurchdringbare Wand" zwischen den beiden Teilen des Zustandsraumes und landet spiralförmig im anderen Fixpunkt (Abb. 7).

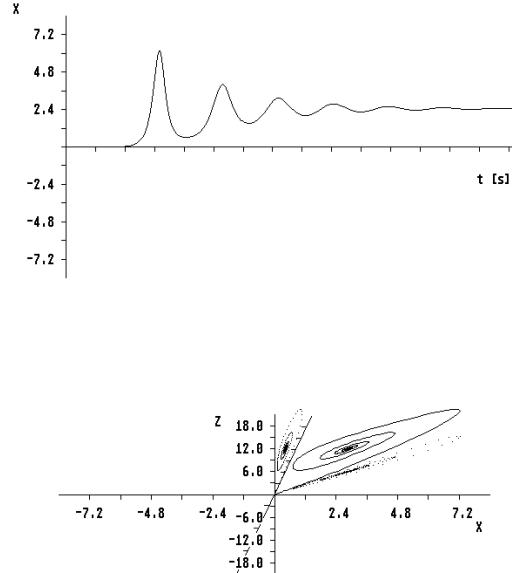
Dies entspricht der einmaligen Drehrichtungsänderung des Rades, bevor es die stationäre Drehung erreicht.

Bei gleichem Parameterwert, also gleicher Temperaturdifferenz, aber anderen Anfangsbedingungen, treten auch mehrfache Richtungsänderungen auf:

das Fluid verhält sich anscheinend völlig regellos, und es ist unmöglich vorherzusagen, welche Rotationsrichtung sich schließlich einstellen wird:  $R$  liegt im vorchaotischen Parameterbereich.

Bei  $R = 15.9$  erreicht das aus der Ruhe startende System den Fixpunkt nicht mehr: Die Trajektorie verbindet nun asymptotisch den Ursprung mit einem instabilen Grenzzyklus (heterocline Verbindung [7]) und pendelt bei größeren  $R$ -Werten unent-

schlossen zwischen positiven und negativen  $X$  Werten hin und her. Wir können rein qualitativ nicht beurteilen, um was für eine Bewegungsfigur es sich dabei handelt. Die Untersuchung des Verhaltens im Zustandsraum gibt uns jedoch eine eindeutige Antwort: Wie aus heiterem Himmel, in Form einer sogenannten Blue-Sky-Katastrophe [7], wird das Endverhalten unseres Rades vom Chaos befallen (im

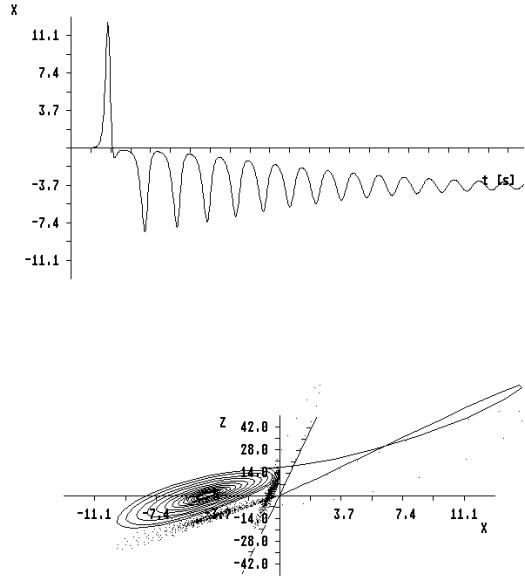


**Abb. 6**  $R = 7.0$ : Die Schwankungen nach Einsetzen der Konvektion werden heftiger und klingen langsamer ab. Immer noch aber bleibt die einmal eingeschlagene Strömungsrichtung, mit noch größerer Geschwindigkeit, erhalten.

Einschwingverhalten kündigt sich dieser Umschwung allerdings bereits an: man vergleiche die Abbildungen 8 und 9). Noch aber kann das System von geeigneten Startpunkten aus die das geordnete Enderhalten repräsentierenden Fixpunkte erreichen.

Mit zunehmendem  $R$  ziehen sich die beiden instabilen Grenzzyklen auf die zugehörigen Fixpunkte zusammen und erschweren deren Erreichen immer mehr. Bei  $R = 19.5$  schließlich fallen die Zyklen mit den Fixpunkten zusammen (Hopf-Bifurkation [7]). Dieser Zustromwert entspricht dem endgültigen

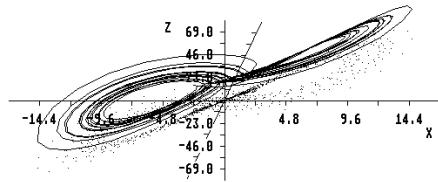
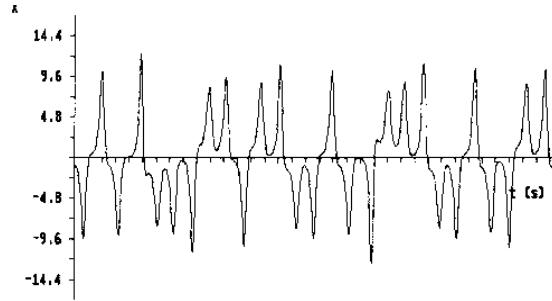
Abschied von der regulären Drehung, die nun von keinem Startwerte aus mehr erreicht werden kann. In dem Intervall  $15.9 < R < 19.5$  koexistieren jedoch beide Typen von Grenzverhalten: Das eingeschwungene System erweist sich als relativ unempfindlich ge-



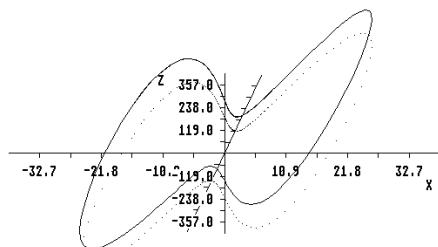
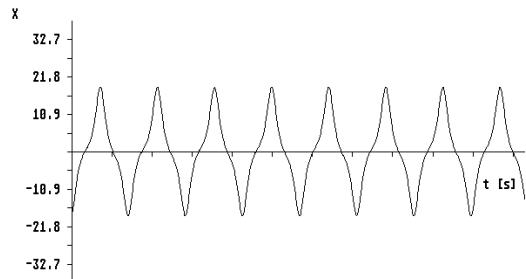
**Abb. 7**  $R = 15.0$ : Die Schwankung beim Verlassen des Ursprungs ist so heftig, daß sich die Rotationsrichtung nach einmaligem Ausschlag umkehrt. Die Konvergenz

genüber stetigen Veränderungen von  $R$ : Erst bei Überschreiten der Intervallgrenze kippt das System aus dem chaotischen Verhalten in die reguläre Drehung oder umgekehrt (Hysterese).

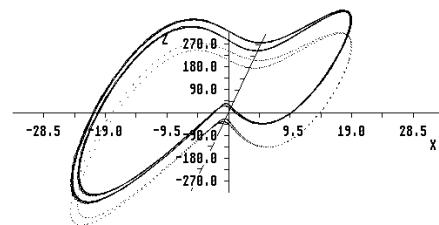
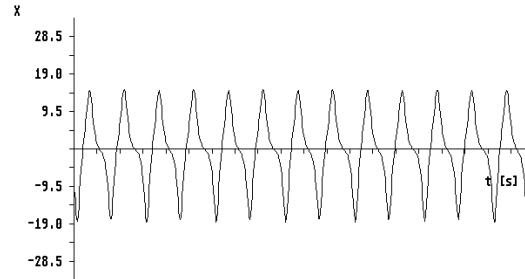
Der Beginn der chaotischen Bewegung bedeutet für Wasserrad, daß damit die Vorhersagbarkeit der Bewegungen im einzelnen nicht mehr gegeben ist. Betrachtet man das chaotische Verhalten im Zustandsraum, so erkennt man, daß der Verlauf einzelner Trajektorien im Detail nicht vorhersagbar ist. Global gesehen bleiben die Trajektorien jedoch auf ein bestimmtes Gebiet beschränkt, das sich durch den sogenannten Lorenz- Attraktor charakterisieren läßt (Abb.9).



**Abb. 9**  $R = 24.0$ : Beide Fixpunkte außerhalb des Ursprungs sind instabil. Das System kann ihnen zwar nähern. Jedoch schaukeln sich die Schwankungen jetzt immer so weit auf, daß eine Richtungsumkehr erfolgt: Weder konvergiert die Trajektorie gegen einen Fixpunkt, noch schließt sie sich. Es ist unmöglich, die Bahn detailliert vorherzusagen: Die Bewegung ist chaotisch. (Wegen der Übersichtlichkeit ist diesmal nur die Projektion auf die  $(X, Y)$ -Ebene mitgezeichnet.)

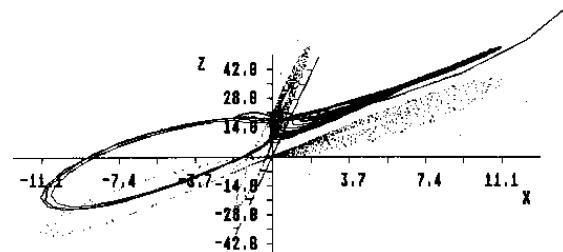
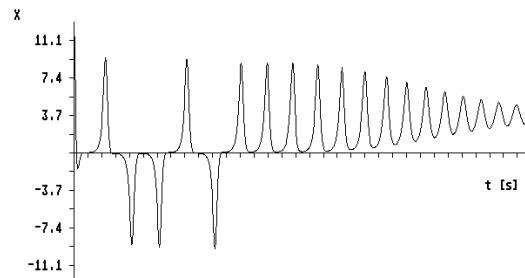


**Abb. 10:** Bei  $R = 100$  treten periodische Schwankungen mit Richtungsänderungen auf: das System schwingt periodisch: Trajektorie mit  $(X, Y)$ -Projektion.



**Abb. 11:** Periodenverdopplung bei Verkleinerung von  $R$  aus dem nachchaotischen Bereich ( $R = 91$ ): Trajektorie mit  $(X, Y)$ -Projektion

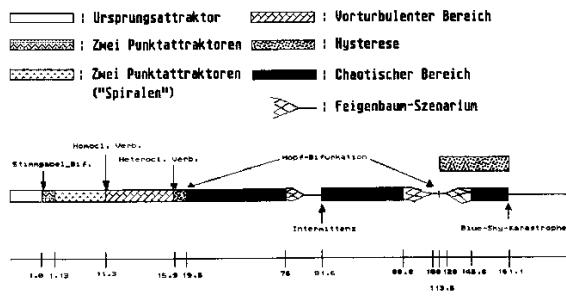
Bei der Betrachtung dieses schönen filigranen Gebildes kann man Regelmäßigkeiten erkennen, die dem im starken Regen chaotisch tanzenden Rad direkt wohl schwerlich anzusehen sind. Ein chaotischer Attraktor ist somit eine Art Röntgenaufnahme eines Systems, das wir ansonsten in Form von Fotos oder durch direkte Beobachtung nur "von au-



**Abb. 8:** Chaotischer Einschwingvorgang im vorchaotischen Parameterbereich ( $R = 15.0$ )

ßen" kennen. Sicherlich ist ein derartiger Einblick in das Innenleben eines Wasserrades nicht gerade sehr aufregend. Für das Verständnis komplexer Systeme, für die das Wasserrad nur einen anschaulichen Zugang darstellt, kann sich der Röntgenblick auf chaotische Attraktoren jedoch lohnen. Jedenfalls zeichnen sich Anwendungen und Nutzen der Chaosforschung in vielen Gebieten ab.

Die weitere Erhöhung von  $R$  bringt zunächst nichts Aufregendes. Erst bei dem sehr hohen Wert von  $R = 100$  schließt sich hinter dem chaotischen Bereich wieder ein reguläres Verhalten an: das System schwingt periodisch (Abb.10). In vielen Veröffentlichungen über das Lorenz-System wird dieses Verhalten gar nicht mehr diskutiert, weil das System in diesem Bereich als Modell der Bénard- Konvektion maßlos überstrapaziert wird. Untersucht man, wie diese hoch geordnete Bewegung aus dem Chaos entsteht, findet man nach Verkleinerung von  $R$  bei  $R = 91$  eine Schwingung mit zwei unterschiedlichen sich abwechselnden Amplituden(Abb.11). Die Bahn im Zustandsraum schließt sich erst nach zwei Umläufen (Periodenverdopplung).



**Abb. 12:** Übersicht über das Verhalten des Lorenzsystems im gesamten Bereich des Parameters  $R$  (bei  $R_s = 240$ ).

Bei weiterer Verkleinerung von  $R$  versinkt das System nach weiteren Periodenverdopplungen wieder im Chaos (Feigenbaum-Szenario ) für den Übergang von regulärem zu chaotischem Verhalten).

( Es sei bereits hier angemerkt, daß diese Feinheiten sich allerdings an unserer groben Realisierung des Wasserrads nicht reproduzieren lassen. Sie versinken sozusagen im Rauschen - und zwar nicht nur im Rauschen des herabströmendes Wassers.)

Bei weiterer Variation des Parameters  $R$  erweist sich das Verhalten des Lorenz- Systems als noch wesentlich vielfältiger. Man kann deshalb daran fast alle Phänomene demonstrieren und untersuchen, die für chaotische Systeme typisch sind, z.B. lokale (Hopf- Bifurkation) und globale (homokline und heterokline Verbindung) Bifurkationen und verschiedene Übergänge ins Chaos (neben dem Feigenbaum-Szenario und der Blue-Sky-Katastrophe z.B. den intermittierenden Übergang). Die Details solcher Übergänge

werden z.B. in [4] und [7] ausführlich dargestellt. Da sie jedoch am Wasserrad praktisch nicht mehr beobachtbar sind, beschränken wir uns hier auf die Übersicht in Abb.12).

## Experimentelle Ergebnisse

### Aufbau und Konstruktion des Wasserrades

Bei einem normalen Wasserrad sind die schaufelartigen Behälter fest am Radkranz fixiert. Ihre Öffnung zeigt daher auf der einen Seite nach oben und auf der anderen Seite nach unten. Diese systembedingte Unsymmetrie hat eine eindeutige Drehrichtung des Rades zur Folge, wenn es einem Wasserstrom ausgesetzt ist.

Werden die Behälter jedoch, wie Gondeln eines Riesenrades drehbar gelagert, so angebracht, daß ihre Öffnung immer nach oben zeigt, und sorgt man außerdem dafür, daß das Wasser durch eine kleine Öffnung im Boden der Behälter wieder abfließt, so dreht sich das Rad in der einen oder anderen Richtung. Darüberhinaus können neben der einfachen Drehung weitere, teilweise sehr komplizierte Bewegungsfiguren auftreten, die man der einfachen Wasserradkonstruktion von vornherein nicht zutraut. Erst eine nähere Betrachtung der am Rad auftretenden physikalischen Vorgänge vermag diesen Sachverhalt aufzuklären .

Das Wasserrad läßt sich beispielsweise durch das Laufrad eines Fahrrads ( $\varnothing = 0,56\text{m}$ ) realisieren. Dieses wird so eingespannt, daß die Drehachse parallel zum Erdboden steht. An der Felge werden z.B. zwölf Behälter (Höhe: 53mm; Durchmesser der kreisförmigen Grundfläche: 105mm) befestigt. Hierzu wird die Felge des Rades in gleichen Abständen angebohrt. Die Bohrungen dienen als Halterungen für Stricknadeln, an denen die Behälter leicht drehbar befestigt sind. Die Behälter sind mit einem Leck versehen. Da das Systemverhalten empfindlich von der Größe dieser Öffnungen abhängt, kommt es maßgeblich auf die Wahl des Öffnungs durchmessers an. Für die hier dargestellte Versuchsserie wurde ein Öffnungs durchmesser von 3.5 mm gewählt. Rekonstruktion von Attraktoren

Die durch den Luftwiderstand und die Achsreibung gegebene Dämpfung erweist sich als zu klein für die Versuchsdurchführung. Deshalb wird ein Faden um die Radnabe gelegt, dessen Spannung mit Hilfe von Gewichten variiert werden kann. Kontroll- und Ordnungsparameter: Welche der verschiedenen Bewegungsfiguren auftritt, wird durch die jeweilige Einstellung der Parameter bestimmt, also jener von außen kontrollierbaren Größen, die nicht schon durch

die Konstruktion des Systems selbst festgelegt sind. Die Parameter unseres Wasserrads sind der Zustrom des Wassers, der den Abfluß bestimmende Querschnitt der Löcher und die Reibung. Da von diesen Parametern der Zufluß am einfachsten zu variieren ist, benutzen wir ihn als Kontrollparameter und legen sowohl die Reibung als auch die Größe der Abflußlöcher fest. Die sich jeweils einstellenden Bewegungsfiguren werden durch sogenannten Ordnungs- oder Gestaltparameter, die Winkelgeschwindigkeit des Wasserrades, erfaßt. Zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit  $w$  wird die Bewegung des Rades durch einen Bewegungsmeßwandler in eine Spannung umgewandelt, die je nach Wahl dem zurückgelegten Winkelintervall, der Geschwindigkeit oder der Beschleunigung proportional ist (vgl. [8]). Die vom Meßwandler erzeugten Spannungen müssen dann von einem Analog-Digital-Wandler in digitale Signale umgesetzt werden, die mit einem Computer weiter verarbeitet und grafisch dargestellt werden können.

## Rekonstruktion von Attraktoren

Die Bewegungen des Wasserrades werden im Zustandsraum dargestellt, der durch die drei generalisierten Koordinaten des Lorenz-Systems aufgespannt wird. Auf einfache Weise läßt sich allerdings nur die Winkelgeschwindigkeit  $w$  experimentell erfassen. Mit Hilfe eines in [9] und [10] beschriebenen Verfahrens gelingt es jedoch, den Attraktor des Systems aus der Meßreihe einer Variablen, in unserem Fall also der Winkelgeschwindigkeit, zu rekonstruieren.

Durch eine Messung sei eine Folge  $x_1, x_2, \dots$  von Werten der Variablen  $x$  bekannt. Mittels der Folge  $x_i$  kann dann folgendermaßen ein Orbit  $\vec{x}_i$  im  $n$ -dimensionalen Zustandsraum erstellt werden:

$$\vec{x}_i = (x_i, x_{i+m}, x_{i+2m}, \dots, x_{i+nm})$$

I.a. muß bei dieser Vektorbildung jedoch darauf geachtet werden, daß benachbarte Komponenten  $x_j$  und  $x_{j+m}$  in der Meßreihe weder einen zu großen noch einen zu kleinen zeitlichen Abstand voneinander haben dürfen. Im ersten Fall korrelieren die Werte bei chaotischen Bewegungen nicht mehr miteinander, im zweiten wird der Attraktor auf der Diagonalen "zusammengequetscht". Die richtige Wahl von  $m$  erhält man in der Praxis durch Versuch und Irrtum.

Auf der Grundlage dieses Konstruktionsprinzips haben wir die im weiteren auftretenden Attraktoren erstellt; und zwar für das Lorenz-System aus berechneten  $X$ -Werten, für das Wasserrad aus gemessenen Werten für die Winkelgeschwindigkeit.

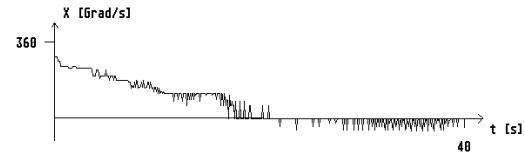


Abb. 13: Das Wasserrad kommt zur Ruhe ( $R = 8 \text{ cm}^3/\text{s}$ ).

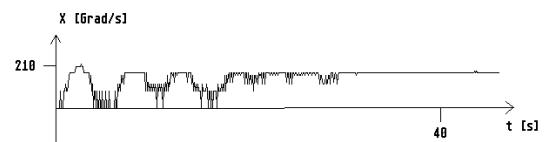


Abb. 14: Beginn einer stationären Drehbewegung beim Wasserrad ( $R = 20 \text{ cm/s}$ ).

## Ergebnisse und Vergleich mit der Computersimulation

Ein wesentliches Ziel der experimentellen Untersuchung besteht darin zu demonstrieren, daß die Lorenz-Gleichungen das Verhalten des Wasserrades zu beschreiben vermögen. Dabei zeigt sich insbesondere, daß das Rad in Abhängigkeit vom Zufluß entweder zur Ruhe kommt, sich stationär dreht, chaotische Drehbewegungen ausführt oder regelmäßig schwingt.

Im folgenden werden Meßergebnisse zunächst in Geschwindigkeits-Zeit-Diagrammen dargestellt, in denen positive Werte einer Drehung des Rades im Uhrzeigersinn entsprechen.

a) *Das System kommt zur Ruhe:* Wenn man den Wasserzulauf  $R$  klein genug wählt (bis  $R \approx 15 \text{ cm}^3/\text{s}$ ) und das Rad manuell in Bewegung setzt, so kommt diese Bewegung schnell zur Ruhe. Die Analogie zwischen beiden Systemen wird durch Vergleich der Abbildungen 3 und 14 deutlich. Leider ist den Meßwerten ein Rauschen überlagert, das auf ein ungleichmäßiges Angreifen der Reibung, insbesondere aber auf eine schlechte Digitalisierung der Meßwerte zurückgeführt werden kann.

b) *Gleichförmige Drehbewegungen als stabile Zustände*: Bei einem Wasserzulauf von  $R \approx 20 \text{ cm}^3/\text{s}$  ist der Ruhezustand nicht mehr stabil. Das Rad beginnt, sich in einer durch zufällige Schwankungen bestimmten Richtung zu drehen, und nimmt unter abklingenden Schwankungen eine feste Drehgeschwindigkeit an (vgl. Abb. 14 und 5).

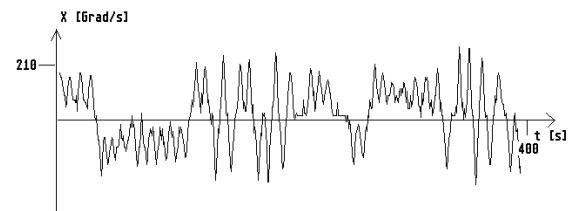
Wie beim Lorenz-System stellt sich bei Erhöhung des Zulaufs unter stärkeren Schwankungen eine größere Endgeschwindigkeit ein.

c) *Vorturbulenz*: Stellt man den Wasserzulauf auf  $R \approx 32 \text{ cm}^3/\text{s}$  ein, dann beginnt das Rad sofort, sich heftig zu drehen. Es dreht sich jedoch zunächst mit schwankender Winkelgeschwindigkeit und wechselt häufiger seine Drehrichtung, bevor es sich auf eine stabile stationäre Drehbewegung einpendelt. Der Drehsinn dieser sich letztlich einstellenden Bewegung kann nicht vorhergesagt werden (vgl. Abb. 8 und 15).

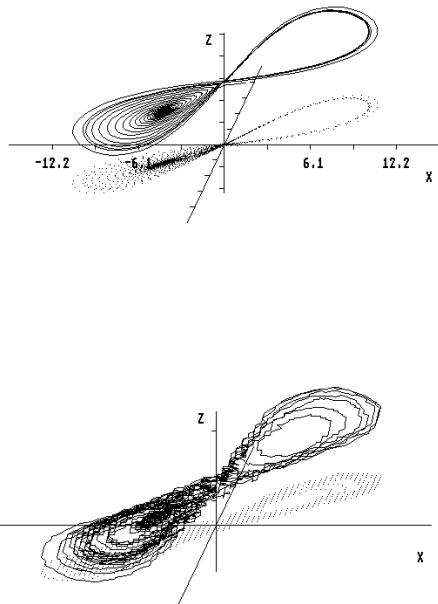
In den unter a) und b) beschriebenen Kontrollparameterbereichen war das den Meßwerten überlagerte Rauschen nahezu von der gleichen Größenordnung wie das überstrichene Geschwindigkeitsintervall. Eine Attraktorrekonstruktion nach der oben beschrie-

benen Methode führte deshalb zu keinen befriedigenden Ergebnissen. Im vorturbulenten Bereich wird jedoch ein doppelt so großes Geschwindigkeitsintervall überstrichen, so daß die Rekonstruktion brauchbare Resultate liefern sollte.

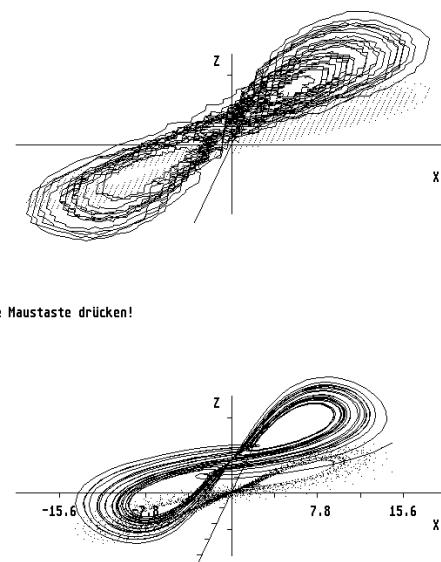
Die Diagramme in Abb. 16 zeigen Trajektorien im Zustandsraum des Lorenz-Systems bzw. des Experiments im vorchaotischen Bereich. Beide Trajektorien wurden aus einer Folge von X-Werten nach dem oben beschriebenen Verfahren rekonstruiert. Beim Lorenz-System wurden die X-Werte im Abstand  $\Delta t = 0.02\text{s}$  (= Integrationsschrittweite) aufgenommen und für die Vektorbildung  $m = 5$  gewählt. Die entsprechenden Werte für das Wasserrad betrugen  $\Delta t \approx 0.05\text{s}$  und  $m = 10$ .



**Abb. 17:** Chaotische Drehbewegungen des Wasserrades ( $R = 38 \text{ cm}^3/\text{s}$ )



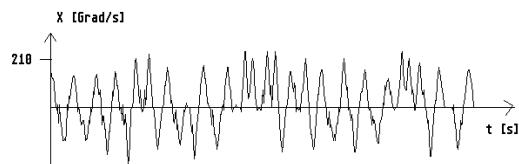
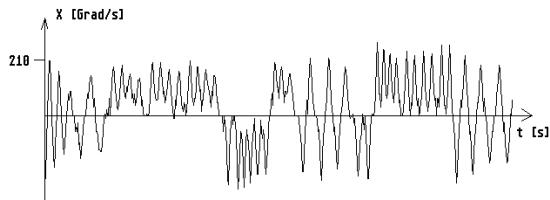
**Abb. 16:** Aus einer Folge von X-Werten rekonstruierte Orbits im Zustandsraum a) Lorenz-System ( $R = 15.0$ ), b) Wasserrad ( $R = 32 \text{ cm}^3/\text{s}$ )



**Abb. 18:** Aus einer Folge von X-Werten rekonstruierte Attraktoren in Theorie und Experiment. a) Lorenz-System ( $R = 24$ ), b) Wasserrad ( $R = 40 \text{ cm}^3/\text{s}$ )

Die Trajektorien des Einschwingverhaltens spiegeln bereits die typische Form des Lorenz-Attraktors wieder: Die Transienten bewegen sich zunächst in Auswärtspiralen um den einen Fixpunkt, ehe sie sich dann dem anderen zuwenden. Erst wenn sie bei einem dieser Wechsel einem der Fixpunkte nahe genug kommen, werden sie von diesem angezogen und spiralen auf ihn zu.

d) *Chaos*: Oberhalb eines gewissen kritischen Wer-



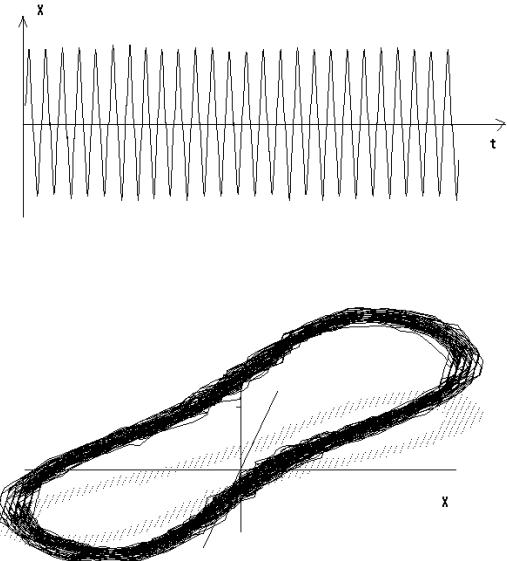
**Abb. 19:** Entwicklung chaotischer Orbits im Experiment bei Steigerung des Wasserzuflusses

tes für den Wasserzufluß stellt sich keine stationäre Drehbewegung mehr ein. Das Rad dreht sich mit schwankender Geschwindigkeit und wechselt in unvorhersagbarer Weise den Drehsinn. Die Frage jedoch, ob dieses Chaos dem von den Lorenz-Gleichungen erzeugten entspricht, lässt sich durch Vergleich der Abbildungen 9 und 17 nicht befriedigend beantworten, auch wenn die Gemeinsamkeiten der dargestellten Bewegungen auf der Hand liegen.

Hier hilft wiederum nur die Rekonstruktion der zu den X-t-Diagrammen gehörigen Attraktoren. Der Vergleich beider Phasendiagramme (Abb. 18) macht die gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment deutlich: Die Trajektorien winden sich in Auswärtspiralen um den jeweiligen Fixpunkt, bis sie schließlich zum anderen Fixpunkt überwechseln, wo das gleiche Szenarium erneut beobachtet werden kann.

Eine zusätzliche Übereinstimmung beider Systeme kann in der Entwicklung chaotischer Trajektorien bei weiterer Steigerung der jeweiligen Kontrollparameter

entdeckt werden. Für das Lorenz-System existiert nämlich für festes  $R$  eine Obergrenze, die festlegt, wie oft ein Orbit höchstens um jeweils einen Fixpunkt rotieren kann. Diese Obergrenze nimmt nach dem Auftreten des chaotischen Attraktors im theoretischen System zunächst kontinuierlich mit größer werdendem Kontrollparameter ab (vgl. [6], [4], [7]). Im X-t-Diagramm macht sich dieses dadurch be-



**Abb. 20:** Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm und rekonstruierter Attraktor nachchaotischer regulärer Schwingungen des Wasserrades ( $R = 40 \text{ cm}^3/\text{s}$ )

merkbar, daß die mittlere Zahl sowie das Maximum der Zahl der Schwingungen oberhalb bzw. unterhalb der  $t$ -Achse geringer wird. Die X-t-Diagramme in Abb. 19 sind ein Indiz dafür, daß sich diese Entwicklung auch im Experiment abzeichnet.

e) *Reguläre Schwingungen*: Aus der Simulation des Lorenz-Modells sind bei sehr hohen Werten von  $R$  reguläre Schwingungen zu erwarten. Wir empfinden es daher als eine Art krönenden Abschluß, daß unser Wasserrad diese Erwartung erfüllt, als gäbe es nichts Selbstverständlicheres auf der Welt. Da die Bewegungsgleichung - wie wir gesehen haben - nach einigen Umformungen direkt auf die Lorenz-Gleichungen führte, war dies aber auch zu erwarten. Die Schwingung bleibt solange stabil, bis das Wasser über den Rand der Behälter fließt, und das System damit den Gültigkeitsbereich des Modells verläßt (Abb. 20).

## Schlußbemerkungen

Das beschriebene Wasserrad ist zum einen ein einfacher herstellbares Gerät, an dem sich wesentliche Eigenschaften chaotischer Systeme experimentell untersuchen lassen. Es ein anschauliches Modell für das berühmte Lorenz-System dar: Die Bewegungsgleichungen des Wasserrads lassen sich nämlich mit nur geringfügigen Idealisierungen auf die Lorenz-Gleichungen reduzieren. Es erfüllt daher die Lorenz-Gleichungen wesentlich besser als die Bénard-Konvektion, die nur in einem sehr kleinen Parameterbereich zutreffend beschrieben wird. Da das Lorenz-System inzwischen als eine Art Paradigma zur Einführung in den Bereich chaotischer Systeme angesehen werden muß, stellt das Wasserrad eine Möglichkeit dar, die wesentlichen aus der Simulation hervorgehenden Verhaltensmerkmale mit konkreten Phänomenen zu verknüpfen und auf diese Weise das Lorenz-System mit Leben zu erfüllen.

## Literatur

- [1] Luchner, K., Worg, R.: Chaotische Schwingungen. Praxis der Naturwissenschaften/Physik 35/4, 9 (1986)
- [2] Korsch, H., Mirbach, B., Jodl, H.J.: Chaos und Determinismus in der klassischen Dynamik: Billard-Systeme als Modell. Praxis der Naturwissenschaften/Physik 36/7, 2 (1987)
- [3] Backhaus, U., Schlichting, H.J.: Auf der Suche nach Ordnung im Chaos (erscheint demnächst in MNU) ersetzen durch Verweise auf entspr. Kapitel.
- [4] Sparrow, C.: The Lorenz Equations. New York etc.: Springer 1982.
- [5] Lorenz, E.N.: Nonperiodic Deterministic Flow, J. Atmosph. Sciences 20, 130 (1963)
- [6] Lichtenberg et al. Regular and Stochastic Motion, Berlin: Springer 1983
- [7] Thomson, J.M.T., Steward, H.B.: Nonlinear Dynamics and Chaos. New York etc.: Wiley 1986
- [8] Leybold-Heraeus: Gebrauchsanweisung: Bewegungs-Meßwandler Nr. 33763, (1983)
- [9] Grassberger, P., Procaccia, I.: Characterisation of Strange Attractors, Phys. Rev. Lett., 50/5, 346 (1983)
- [10] Grassberger, P., Procaccia, I.: Measuring the Strangeness of Strange Attractors, Physica 9D, 189, (1983)