Praxis der Naturwissenschaften - Physik 42/4, 41 (1993) (170)

Chaos in Platos Höhle

H. Joachim Schlichting, Udo Backhaus . Universität Osnabrück

Denn der Schatten, den eine Schöpfung
auf der Wand der Wirklichkeit wirft, ist reine Logik.

Antoine de Saint- Exypéry

Vorhersage

Ein wesentliches Ziel der neuzeitlichen Naturwissenschaften ist die Vorhersage. Dieses Ziel wurde dadurch erreicht, daß man nach Mechanismen suchte, die hinter den Erscheinungen wirken und auf der Grundlage einer strengen Verknüpfung von Ursache und Wirkung für den Ablauf des beobachtbaren Geschehens sorgen. Indem der Mechanismus bzw. die Dynamik des betrachteten Systems in einer Differentialgleichung formalisiert wird, genügt die alleinige Kenntnis des Zustandes eines Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt, um den Zustand zu einem beliebigen anderen Zeitpunkt zu berechnen.

Um eine solche Uhrwerkwelt zu schaffen, ist die Physik auf eine extreme Reduktion der Komplexität des zu beschreibenden Wirklichkeitsausschnitts angewiesen. Dabei kommt es notgedrungen zu Ausblendungen von Teilaspekten und starken Vereinfachungen.

Plato illustriert diese Reduktion in seinem berühmten Höhlengleichnis dadurch, daß er das zu Erkennende als Schatten des Wirklichen darstellt, die sich durch Projektion ergeben.

Sieh nämlich Menschen wie in einer unterirdischen, höhlenartigen Wohnung, die einen gegen das Licht geöffneten Zugang längs der ganzen Höhle hat...Dergleichen Menschen (haben) von sich selbst und voneinander (nie) etwas anderes gesehen... als die Schatten, welche das Feuer auf die gegenüberstehende Wand wirft...Auf keine Weise können diese etwas anderes für das Wahre halten als die Schatten jener Kunstwerke? [1]

Dieses Bild kann u.E. im anschaulichen wie im mathematischen Sinn ziemlich wörtlich genommen werden: Im Schatten gehen nicht nur Glanz und Farbe der Originale verloren, darüber hinaus schrumpfen auch die Dimensionen.

Projektionen können glücklich und unglücklich sein. Beispielsweise gibt der Schattenriß eines Gesichts dann die meisten Details des Originals wieder, wenn es im Profil projiziert wird. Von hinten angestrahlt erkennt man weitaus weniger. Ein an einer Schraubenfeder schwingendes Massestück verrät in der Vertikalprojektion, also etwa von unten angestrahlt, nichts von der Schwingung; hingegen würde jede Horizontalprojektion, ja sogar jede schräge Projektion alles Wesentliche des Vorgangs preisgeben.

Wir wollen im folgenden untersuchen, ob auch zufällig erscheinende Datensätze als Ergebnis der "unglücklichen" Projektion eines regulären Vorgangs aufgefaßt werden können. Dazu wird anhand eines konkreten Beispiels zunächst die möglicherweise fehlende Dimension rekonstruiert und der Vorgang auf einen deterministischen Mechanismus zurückgeführt. Es soll aber auch gezeigt werden, daß uns bei solchen Vorgängen die Kenntnis des Mechanismus nichts nützt, sofern man vom klassischen Anspruch ausgeht, mit den Anfangsbedingungen und der Dynamik eines Systems das Systemverhalten für alle Zeiten "in der Tasche" zu haben. Vorgänge, die indeterministisch erscheinen, für

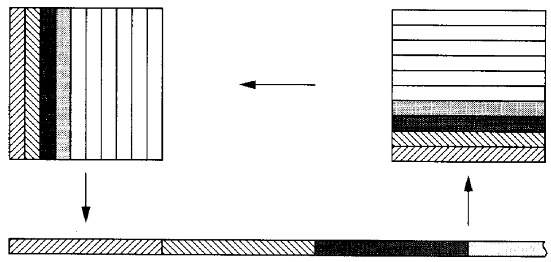

Abb. 1: Zusammenpressen, Zerschneiden und Wiederherstellen des Einheitsquadrats stellt einen deterministischen, in der seitlichen Projektion des Quadrats aber indeterministisch erscheinenden Vorgang dar.

die aber ein deterministischer Mechanismus angegeben werden kann, werden "chaotisch" genannt und in jüngster Zeit im Rahmen der Chaosforschung diskutiert. Auf der Grundlage des wohl einfachsten chaotischen Mechanismus, der sogenannten Bäkkertransformation, sollen im folgenden einige charakteristische Merkmale chaotischen Verhaltens geometrisch veranschaulicht werden.

Der springende Punkt

Wir betrachten einen Vorgang, der aus einem auf dem Einheitsintervall springenden Punkt P besteht. Läßt man ihn von der Stelle 0,500000 starten (die Nullen sollen die Ablesegenauigkeit zum Ausdruck bringen), so durchläuft er beispielsweise die Sequenz: 0,950000 → 0,195000 → 0,719500 →0,871950 → 0,687195 → 0,2687195. Betrachtet man diesen Vorgang als einen dynamischen Prozeß, bei dem jeder Zahlenwert Startpunkt für die folgenden ist, muß man den Eindruck eines erratischen Hin- und Herspringens gewinnen. Andererseits scheint sich der Zufall auf die erste Stelle nach dem Komma zu beschränken. Der Rest der Dezimalen wird dagegen in vorhersehbarer Weise jeweils um eine Stelle nach rechts verschoben. Das gilt auch für die neu hinzu- gekommenen Ziffern. Daraus läßt sich erkennen, daß die ursprüngliche Zahl jeweils durch 10 dividiert und anschließend mit einer vorerst noch "vom Himmel fallenden" Zahl addiert wird. Macht man sich die eingangs erörterte Idee zunutze, daß durch eine ungeschickte Projektion möglicherweise Informationen über das Zustandekommen der neu hinzukommenden Ziffer verlorengegangen sind, so könnte man schließlich auf folgende Erklärung kommen:

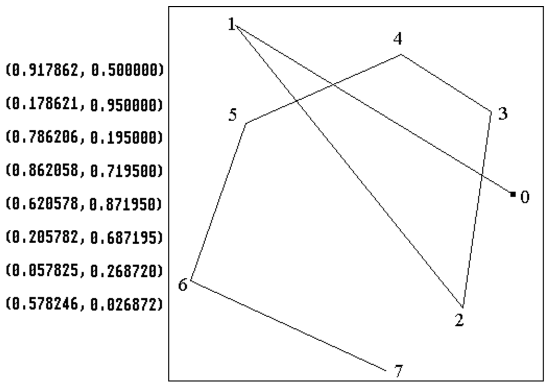

Abb. :3 Orbit des Prozesses im Einheitsquadrat. Da wir die Punkte nur mit einer Genauigkeit von sechs Stellen nach dem Komma kennen, muß die Ziffernfolge aufgrund ihrer Verschiebung jeweils um eine Stelle nach links am rechten Ende durch eine beliebige Ziffer ergänzt werden. Dazu haben wir lediglich die Rechengenauigkeit des Computers auf sechs Stellen reduziert.

Das wilde Hin- und Herspringen der Zahl auf dem Einheitsintervall ist nur der Schatten eines sich auf dem Einheitsquadrat geordnet nach festen Regeln bewegenden Punktes. Dadurch daß wir das Quadrat nur im Schattenriß bzw. von der Seite erleben, können wir nur das Verhalten des Punktes in der Vertikalen wahrnehmen. Die Horizontalkoordinate bleibt uns verborgen. In der Tat, man stelle sich vor, das Quadrat werde zunächst um den Faktor 10 unter Erhaltung der Fläche zu einem langen Rechteck zusammengestaucht. Dann läßt sich das Quadrat dadurch rekonstruieren, daß man das Rechteck in 10 gleichlange Streifen zerschneidet und übereinander stapelt.

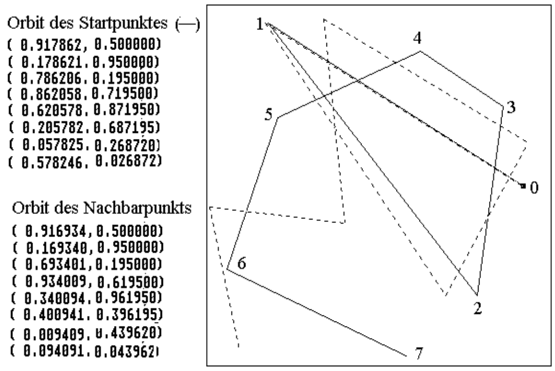

Abb. 2: Zwei benachbarte Startpunkte entfernen sich sehr schnell voneinander und durchlaufen völlig verschiedene Orbits.

Wendet man diese "Dynamik" auf den Startpunkt (0,917862; 0,500000) an, so wird der Punkt anschließend an die Stelle (0,178621; 0,950000) transportiert, von wo er, als neuer Startpunkt dienend, durch abermalige Anwendung der Dynamik bei (0,786206; 0,195000) landet usw. Die horizontale Anfangskoordinate ist 1 4 5 3 0 6 2 im Einheitsquadrat. Da wir die Punkte nur mit einer Genauigkeit von sechs Stellen nach dem Komma kennen, muß die Ziffernfolge aufgrund ihrer Verschiebung jeweils um eine Stelle nach links am rechten Ende durch eine beliebige Ziffer ergänzt werden. Dazu haben wir lediglich die Rechengenauigkeit des Computers auf sechs Stellen reduziert. nämlich in den Dezimalen der ursprünglichen Zahlenfolge verschlüsselt enthalten: Sie besteht aus den jeweils ersten Dezimalen der Folge. Die Suche nach dem Original des Schattens scheint sich gelohnt zu haben. Wir können auf diese Weise einen "dynamischen Prozeß" beschreiben, der die Zahlenfolge hervorbringt. Aber bereits die Frage nach der Fortsetzung der Folge, die Vorhersage weiterer Stationen des Punktes konfrontiert uns mit einem ganz neuartigen Problem: Um die nächste Zahl vorhersagen zu können, müßten wir die nächste Ziffer der Horizontalkoordinate kennen. Aus den vergangenen Stationen des Punktes können wir sie nicht erschließen, weil sie erst in der nächsten Zahl auftreten würde. Aber selbst dann, wenn wir die horizontale Anfangskoordinate so genau wie möglich kennen, nützte es uns nichts. Denn da wir sie nur mit endlicher Genauigkeit feststellen können, die wir hier mit sechs Stellen nach dem Komma vorausgesetzt haben, muß der Prozeß stets dann in die völlige Ungewißheit führen, wenn die letzte Stelle "aufgebraucht" ist. Wir sind dann nicht einmal in der Lage ungefähr abzuschätzen, wo die nächste Station der Reise sein könnte. Die folgende Ziffer kann nämlich, da sie unterhalb der Genauigkeitsgrenze liegt, alle Werte von 0 bis 9 annehmen. Sie bestimmt aber die wichtigste Dezimalstelle der nächsten Zahl.

Sensitivität

Die mit jedem Prozeßzyklus zunehmende Unsicherheit der Vorhersage des Aufenthaltsortes unseres Punktes hat eine der klassischen physikalischen Intuition in krasser Weise zuwiderlaufende Konsequenz. Zwei nur geringfügig voneinander abweichende Punkte trennen sich sehr schnell und durch-

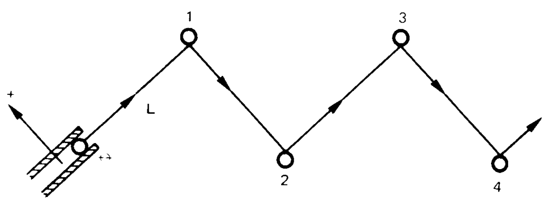

Abb. 3: Billard mit Reflexionen an festgehaltenen Kugeln.

laufen völlig verschiedene Bahnen. Starten wir nämlich unseren Prozeß nicht exakt bei (0,917862; 0,500000), Orbit des Startpunktes: Orbit des Nachbarpunktes: 1 4 3 5 0 6 2 sondern etwas davon abweichend bei (0,916934; 0,500000), so entfernen sich diese benachbarten Startpunkte "exponentiell schnell" voneinander. Bereits nach dem dritten Prozeßzyklus haben die Punkte ihre urprüngliche Nachbarschaft völlig vergessen und gehen ihre eigenen Wege (Abb. 2).

Prozesse von der Art unseres Transformationsmechanismus´ zeichnen sich durch eine "sensitive" Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen aus und widerlegen so das Kausalitätsprinzip in der starken Version: Ähnliche Ursachen haben ähnliche Wirkungen, wie es in der klassischen Physik stets unterstellt wird. Es gilt nurmehr noch in der schwachen Version: Gleiche Ursachen haben gleiche Wirkungen. Damit ist praktisch nichts anzufangen. Denn um einen Vorgang - wie wir es klassisch gewohnt sind - für alle Zeiten vorhersagen zu können, müßten wir die Anfangsbedingungen exakt kennen. Die endliche Meßgenauigkeit hat aber zur Folge, daß sich die Orbits bald im Nebel der Ungewißheit verlieren.

Inhumane Zahlen

Wie sieht es aber aus, wenn wir den Punkt (1/3 = 0,3333...; 0,7000000) als Start wählen. Sind wir dann nicht wegen der unendlich vielen Dezimalstellen der Horizontalkoordinate in der Lage, den Prozeß für alle Zeiten vorherzusagen: Der unter der oben beschriebenen Stauch- und Stapeldynamik bewegte Punkt würde sich allmählich immer mehr an den Punkt (1/3; 1/3) annähern. Doch diese Vorhersage hat einen entscheidenden Makel. Sie ist unrealistisch. Die Schreibweise 1/3 suggeriert eine Genauigkeit, die ein physikalischer Meßwert praktisch nie haben kann. Meßbar ist stets nur ein Wert 1/3 +- d, wobei d ein von der Meßgenauigkeit abhängender Fehler ist.

Die normalerweise unterstellte Annahme einer unendlichen rechnerischen und beobachtungsmäßigen Präzision ist eine Illusion. Sie konnte nur deshalb solange aufrechterhalten werden, weil sich die klassische Physik gegen Vorgänge, wie sie modellmäßig in der obigen Transformation des Quadrats beschrieben wurden, durch Linearisierung gefeit hatte.

Physikalische Beispiele für Vorgänge mit einer sensitiven Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen gibt es genügend. Genannt sei hier nur das mittlerweile vielzitierte Beispiel eines Billardspiels, bei dem eine Kugel zwischen feststehenden Kugeln hin- und herreflektiert wird (Abb.3). Eine kleine Rechnung zeigt dann, daß bei Vernachlässigung der Reibung bereits die neunte Reflexion in eine beliebige Richtung erfolgt, wenn man nur die prinzipiell gegebene Einschränkung der Zielsicherheit aufgrund der Unschärferelation zugrunde legt [2]. Aber auch noch etwas anderes ist deutlich geworden: "Das Zahlenkontinuum ist physikalisch gesprochen eine Fiktion." Joseph Ford schlägt daher vor, als erstes die unkalkulierbaren irrationalen Zahlen aufzugeben: "Diese total inhumanen Zahlen erfordern unendlich viel Information beim Rechnen, Speichern und Definieren" [3]. Seiner Meinung nach sollte man schließlich dahin kommen, die physikalischen Gesetze auf der Grundlage einer beschränkten, endlichen Punktmenge zu reformulieren.

Fazit

Damit ist gezeigt, daß selbst dann, wenn es gelingt, dem scheinbar irregulären Verhalten eines Prozesses durch eine günstigere Projektion eine deterministische Grundlage zu geben, praktisch kein Unterschied zu zufallsbedingtem Verhalten festgestellt werden kann. Geht man nämlich von Zahlenfolgen aus, die mit einem Würfel gewonnen wurden, und damit geradezu den Inbegriff einer Zufallsfolge darstellen, so ist es stets möglich, auch hier einen deterministischen Erzeugungsprozeß zu unterstellen. Nehmen wir an, wir hätten die Folge 643415 erwürfelt. Dann genügt es, sich einen dynamischen Prozeß nach dem obigen Schema vorzustellen, der von dem Startwert (0,643415; 0,000000) ausgeht und nur bis auf die erste Stelle nach dem Komma genau gemessen werden kann. Auf unserem von der Seite betrachteten Quadrat sehen wir auf diese Weise unseren Punkt die Reihe von Dezimalziffern durchlaufen, die in der Zufallsfolge auftreten.

Es hat also wenig Sinn, einzelne Orbits eines chaotischen Systems zu verfolgen. Die Chaosforschung hat jedoch gezeigt, daß die Betrachtung der Gesamtheit aller möglichen Orbits eines solchen Systems Strukturen offenbart, die eine Unterscheidung zwischen rein stochastischen und chaotischen Signalen erlaubt [4].

Literatur:

[1] Platon: Politeia, 7. Buch 414a ff. In: Sämtliche Werke Bd.3. Reinbek: Rowohlt 1963.

[2] Sexl, R.: Irreversible Prozesse. Physik und Didaktik 8/1, 8 (1980) [3] Ford, J.: How random is a coin toss? Physics Today, April 1983, p. 47.

[4] Backhaus, U; Schlichting, H. J: Auf der Suche nach Ordnung im Chaos. MNU 5, (1990)