DOI: 10.1002/piuz.200801191

Spielwiese

Zylinder- und Kugelkreisel

CHRISTIAN UCKE | HANS-JOACHIM SCHLICHTING

Mit einfachen Mitteln lassen sich ungewöhnliche Kreisel aus Plastikzylindern, Holzkugeln und magnetischen Kugeln herstellen, die in unerwartete Bewegungen versetzt werden können. Etwas aufwendigere Versionen zeigen darüber hinaus interessante optische Erscheinungen.

Nicht jeder Kreisel sieht aus wie ein Kreisel, und nicht jeder Kreisel wird angedreht wie ein Kreisel. Bei dem in Abbildung 1 gezeigten Exemplar handelt es sich um einen Hohlzylinder, wie man ihn leicht aus einem Plastikrohr herstellen kann. Drückt man mit dem Zeigefinger auf eines der beiden Enden und lässt ihn wegschnippen, dann entsteht eine erstaunliche Bewegungsfigur: Der Zylinder rotiert gleichzeitig um seine eigene Längsachse ($\boldsymbol{\omega}$ in Abbildung 3) und um eine zur Unterlage senkrechte Achse $\boldsymbol{\Omega}$ durch die Mitte des Zylinders. Er rollt dabei auf dem Umfang der gegenüberliegenden Seite des angestoßenen Endes ab.

Der Zylinder beschreibt zunächst einen deutlich sichtbaren Präzessionskegel, der wegen der Reibung zunehmend flacher wird. Eine rote Farbmarkierung an einem Ende macht die Drehbewegung deutlicher sichtbar. Gegen Ende des noch immer schnell rotierenden Kreisels sieht man deutlich eine stationäre Kreisfläche mit *drei* stehenden roten Punkten (Abbildung 2, ein Video hierzu finden Sie auf **www.phiuz.de** unter „Downloads/Zusatzmaterialien zu den Heften"). Dieses stehende Bild ist kein Zufall, sondern das Produkt eines dreizahligen Verhältnisses der beiden Rotationen zueinander: Die Länge L des Zylinders ist gleich dem Dreifachen seines Durchmessers d. Bei jeder Umdrehung um die senkrechte Achse durch die Mitte des Zylinders rollt er gerade dreimal ab und lässt dementsprechend den roten Punkt mit erstaunlicher Regelmäßigkeit dreimal erscheinen. Kurz nach dem Andrehen des Zylinders sieht man dieses stehende Muster nicht, eventuell aber schnell wechselnde Punkte.

Physik des Zylinderkreisels

Unmittelbar nach dem Andrehen ist der Winkel φ zwischen der Zylinderachse und der Ebene noch relativ groß (Abbildung 3 oben). Dann ist auch die visuelle Erscheinung noch nicht eindeutig und schwieriger zu beschreiben. Bei kleinen Winkeln ($\varphi < 10°$) tritt der geschilderte Effekt deutlich in Erscheinung. Das rechtfertigt die folgende Beschränkung der Betrachtung auf kleine Winkel [1].

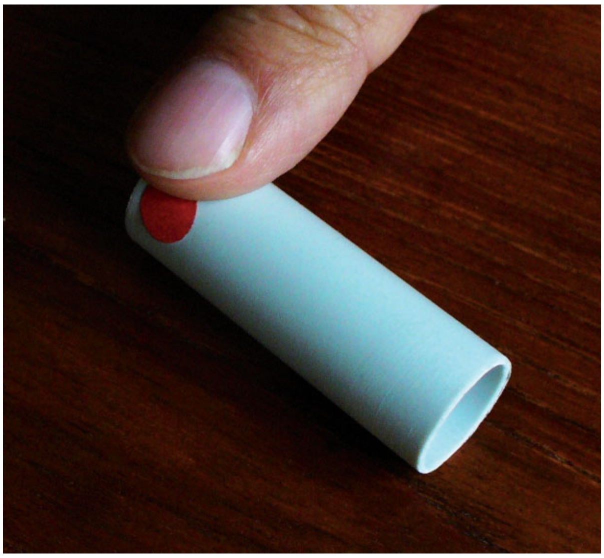


Abb. 1 ***Ein Hohlzylinder, dessen eines Ende mit einem roten Punkt markiert ist, kann durch Anschnipsen in eine kreiselförmige Rotation versetzt werden.***

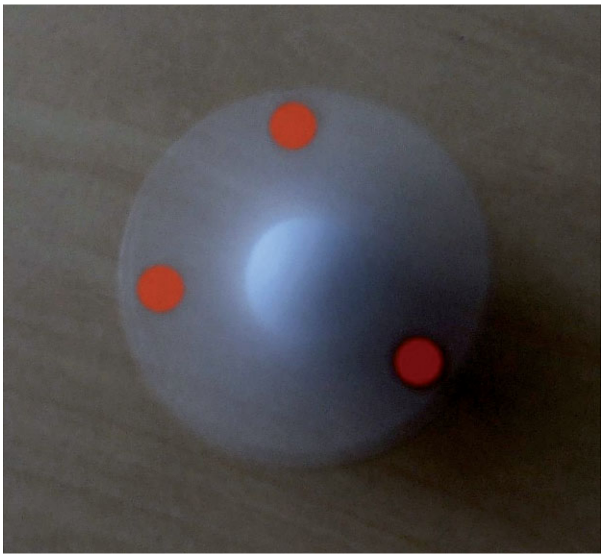


Abb. 2 ***Bei der Aufsicht auf den rotierenden Hohlzylinder erscheinen drei stationäre Punkte. Diese wurden zur besseren Sichtbarkeit auf dem Foto stärker eingefärbt.***

Der Zylinder rotiert einerseits mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ um seine Längsachse, und zum anderen präzediert er mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega}$ um eine Achse senkrecht zur Unterlage. Die Geschwindigkeit eines Punktes auf der Zylinderoberfläche setzt sich zusammen aus der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_S$ aufgrund der Rotation um die Zylinderachse und $\boldsymbol{v}_R$ aufgrund der Rotation um die vertikale Achse (Abbildung 3 Mitte):

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{v}_R = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}.$$

Mit der Voraussetzung eines kleinen Neigungswinkels φ kann man näherungsweise $R \approx L/2$ setzen. Außerdem ist $r = d/2$.

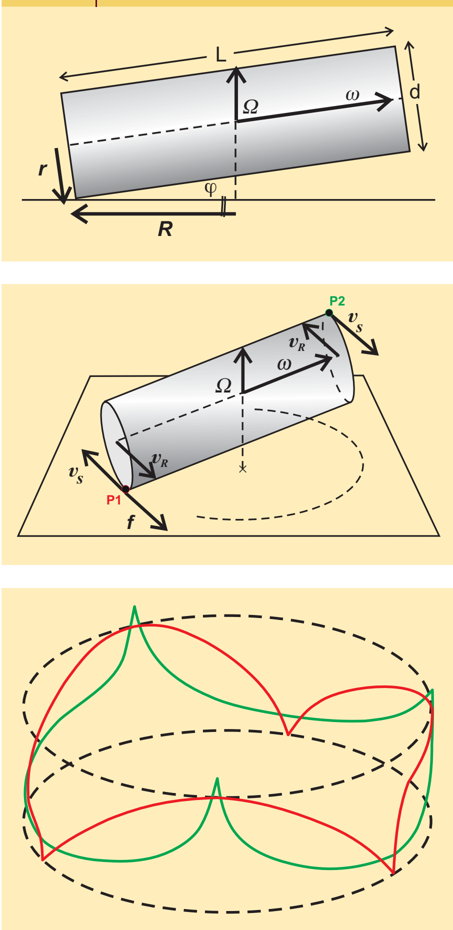
Beim Andrehen des Zylinders wird die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_S$ beim Wegdrücken größer als die Abrollgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_R$ sein. Die Gleitreibungskraft $\boldsymbol{f}$ wirkt jedoch wegen des Schlupfes der Richtung der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_S$ entgegen, so dass die Bewegung automatisch auf schlupffreies Abrollen hinausläuft.

Der rot gekennzeichnete Punkt P_1 durchläuft eine Zykloide. Eine solche Bewegungsfigur kennt man beispielsweise von einer von der Seite gesehenen und bei Dunkelheit leuchtenden Fahrradpedale. Diese schwingt in einem Bogen bis zu einem tiefsten Punkt ab, scheint dort einen Moment zu stehen und bewegt sich dann bogenförmig nach oben. In Abbildung 3 unten ist die horizontale Relativgeschwindigkeit des roten Punktes P_1 zur Unterlage beim Durchlaufen der Zykloidenspitze gerade gleich Null ($\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$). Gleiches gilt für den grünen Punkt P_2 am anderen oberen Ende des Zylinders. Aus $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ folgt $\omega = (L/d)\ \Omega$.

Ist das Verhältnis $L/d = 3$, so ergibt sich daraus, dass der Zylinder bei einer kompletten Drehung um die vertikale Achse gerade drei Umdrehungen um seine eigene Achse vollführt. Deshalb kommt die am oberen Ende des Zylinders befindliche Farbmarke bei jeder vollständigen Drehung des Zylinders um die vertikale Achse dreimal an den gleichen, um 120 Grad versetzten Stellen zum Stillstand und ist dann kurzzeitig zu sehen.

Weil diese Stillstände sehr schnell aufeinander folgen, nimmt das menschliche Auge ein Muster aus drei stationären Punkten wahr. Bei kleinen Zylindern mit Durchmessern von etwa 15 bis 20 mm werden etwa einige tausend Umdrehungen pro Minute erreicht. Das ist mit einem Stroboskop leicht zu ermitteln.

ABB. 3 | ZYLINDERKREISEL



***Oben:** Die wichtigsten physikalischen Größen beim kreiselnden Zylinder.*

***Mitte:** Die Vektoren der Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit beim rotierenden Zylinder und **unten:** die Bahnen von Punkten auf der Zylinderoberfläche für $\varphi \approx 0$ und einem Verhältnis von Länge zu Durchmesser des Zylinders von 3:1.*

Komplizierter werden diese Überlegungen für größere Winkel φ. Genaueres hierzu findet man in [1]. Übrigens rotieren massive Zylinder wegen ihres größeren Trägheitsmomentes länger als Hohlzylinder.

Kugelkreisel

Ist das Verhältnis von Länge zu Durchmesser eines Zylinders gerade gleich eins, so ergibt sich aus dem Vorhergehenden, dass eine Farbmarke auf dem Zylinder bei jeder Umdrehung nur genau einmal zu sehen ist. Ein Zylinder mit derartigem Verhältnis ist gar nicht so leicht anzudrehen. Viel einfacher ist es, zwei Kugeln miteinander zu verbinden, die zu einem gleichartigen Effekt führen. Ein solches Objekt wird sogar als Kinderspielzeug angeboten (Abbildung 4, Holzkugeln duo der italienischen Firma Il Leccio [3]; ∅ = 25 mm). Zwar beträgt der Abstand zwischen den Kugelenden gerade das Doppelte des Durchmessers. Dreht man diese Doppelkugel jedoch mit dem Finger an, so rollt sie auf einem Umfang im Abstand von dem halben Kugeldurchmesser ab. Damit ist sie dem Zylinder mit gleichem Durchmesser und gleicher Länge äquivalent.

Mit einigem Geschick lassen sich derartige Holzkugelkreisel selbst herstellen. Man kann natürlich auch drei oder mehr Kugeln miteinander verbinden. Holzkugeln mit Vorbohrungen gibt es in Bastelgeschäften. Wem diese Bastelei zu mühsam ist, der kann bei Versandhändlern [4] magnetische Kugeln kaufen, die von selbst zusammen halten. Man muss nur noch eine Markierung anbringen. Es empfehlen sich Durchmesser von mindestens 10 mm.

Lässt man solche Metallkugeln im Licht von Leuchtstofflampen rotieren, so ergeben sich auf den reflektierenden Oberflächen hübsche stroboskopische Effekte. Geradezu abgesehen auf einen derartigen optischen Effekt hat es der deutsche Künstler Cornelius Degen-Rentsch, der ein Set von zusammengeschweißten Kugellagerkugeln mit einem farbigen LED-Wechsellicht unter dem klangvollen Na-

> **Abb. 4** *Auch zwei fest miteinander verbundene Holzkugeln oder Magnetkugeln können einen Kreisel bilden.*

>> **Abb. 5** *Magnetkugeln lassen sich durch Pusten durch ein Rohr bis auf fast 10 000 U/min hochdrehen.*

men Doppelkugelhochgeschwindigkeitsturbolanglaufkreisel herstellt. Ein Video mit dem optischen Effekt ist unter [5] zu sehen.

Kleinere magnetische Doppelkugeln mit einem Durchmesser von 8 bis 10 mm lassen sich auf einer konkaven Unterlage (einem großen Uhrglas, einem Rasier- oder Kosmetikspiegel, einem Teller oder ähnlichem) mit einem Strohhalm durch Pusten auf fast 10 000 Umdrehungen pro Minute beschleunigen (Abbildung 6).

Bei genügend großer Drehzahl wird die Magnetkraft nicht mehr ausreichen, die Kugeln zusammen zu halten. Die hohe Drehzahl könnte zu der Vermutung Anlass geben, dass die Kugeln gewehrkugelartig auseinander schießen. Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, bei der die Kugeln tangential zu ihrer Bahn davonfliegen, lässt sich aus

$$F = mv^2 r$$

berechnen. Setzt man für zwei Magnetkugeln von 8 mm Durchmesser und einer Masse von je 2 g eine Kraft von 9 N ein, so ergibt sich für den Betrag von $\boldsymbol{v}$:

$$v = \sqrt{\frac{F \cdot r}{m}} \approx 4 \text{ m / s.}$$

Auch durch noch so kräftiges Pusten haben wir es nicht geschafft, die Magnetkugeln zu trennen. Es besteht also keine Gefahr, dass man von einer derartigen Kugel erschossen wird.

Ein weiteres interessantes Experiment besteht darin, zwei Magnetkugeln auf einem glatten Untergrund leicht versetzt aufeinander zurollen zu lassen [2]. Sobald die Magnetkraft der Kugeln ausreicht, die Reibung mit der Unterlage zu überwinden, richten sich die entgegengesetzten Pole zueinander aus und ziehen einander an. Bei der Annäherung der Kugeln nimmt ihre Winkelgeschwindigkeit wegen der Drehimpulserhaltung sehr stark zu, so dass sie sich beim Aufeinandertreffen sehr schnell umeinander drehen. Bei diesem Vorgang handelt es sich um die Umkehrung der Trennung der Kugeln voneinander. Tatsächlich erreicht man bei geschickter Wahl von Abstand und Anfangsgeschwindigkeit sehr hohe Drehzahlen des Doppelkugelkreisels.

Zusammenfassung

Ein Zylinder führt bei geschicktem Anschnipsen eine komplizierte Kreiseldrehung aus. Besitzen Länge und Durchmesser ein ganzzahliges Verhältnis n, so erscheint eine Markierung auf dem einen Ende des Zylinders als n-fach stehendes Muster. Dieser optische Effekt lässt sich mit einfachen Überlegungen an dem kreiselnden Zylinder erklären. In ähnlicher Weise kann man Kreisel aus zwei oder mehr zusammengefügten Kugeln bauen und ihre Bewegung physikalisch interpretieren.

Literatur und Internet

[1] K. C. Mamola, The Physics Teacher **1994**, *32*, 216.
[2] S. Dail, The Physics Teacher **2006**, *44*, 391.
[3] www.illeccio.com
[4] www.supermagnete.de
[5] www.grand-illusions.com/acatalog/Hurricane_Balls_with_Flower_Pattern.html

Stichwörter

Kreisel, Präzession, Rotation, Zylinder, Zykloide, Stroboskopeffekt.

Die Autoren

Christian Ucke und Hans-Joachim Schlichting sind die Begründer der Reihe Spielwiese.

Anschriften
Dr. Christian Ucke, Rofanstraße 14B, 81825 München. ucke@mytum.de
Prof. Dr. Hans-Joachim Schlichting, Didaktik der Physik, Universität Münster, 48149 Münster. schlichting@uni-muenster.de

