

Der Zusammenhang zwischen Energie, Entropie und Temperatur

U. Backhaus, H. J. Schlichting

1. Einleitung

Das Verständnis der thermodynamischen Temperatur wird u. E. durch folgende Umstände erschwert:

1. Bereits die im Zusammenhang mit der Behandlung idealer Gase eingeführte Temperatur erhält das Attribut „absolut“, obwohl sie genau wie andere Temperaturskalen definiert wird mit Hilfe der thermischen Verhaltens bestimmter Stoffe.
2. Sowohl die Zahlenwerte als auch die Einheit der thermodynamischen Temperatur stimmen überein mit denen der Idealen-Gas-Temperatur. Es wird dadurch schwierig, den begrifflichen Unterschied zwischen beiden Größen zu verstehen. Die Situation ist diesbezüglich ähnlich der entsprechenden Schwierigkeit beim Verständnis von schwerer und träger Masse.
3. Die üblicherweise nach der Berechnung des Carnotschen Wirkungsgrades angegebene Definitionsgleichung für die thermodynamische Temperatur ist nur richtig unter der Voraussetzung reversibler Prozesse. Dadurch wird der Blick auf die Bedeutung, die die thermodynamische Temperatur gerade für mit Entropieänderung verbundene Vorgänge besitzt, zunächst gesperrt.

2. Entropie als Grundgröße

Voraussetzung für dieses Vorgehen ist allerdings die vorherige Einführung von Energie und Entropie als Grundgrößen ([1],[2]). Zunächst soll deshalb kurz die Grundidee der Entropieeinführung skizziert werden:

Wenn man als Ausgangspunkt die alltägliche Erfahrung wählt, daß alle Vorgänge von allein nur in einer Richtung ablaufen (man sagt auch: „irreversibel“ sind) und ihre Umkehrung nur durch einen anderen Vorgang erzwungen werden kann, der in natürlicher Richtung abläuft, dann kann man durch folgende Vereinbarung eines Meßverfahrens die Entropie zu einer Größe machen, deren Anwachsen ein Maß für die unterschiedliche Stärke Irreversibilität von Vorgängen ist:

Meßverfahren für die Entropie

1. Zwei Zustandsänderungen heißen gleich irreversibel, wenn sie sich gegenseitig mit Hilfe eines mechanischen Systems dazu veranlassen können, entgegen der natürlichen Richtung abzulaufen (wir sagen: sich gegenseitig zurückspulen können).
2. Die Irreversibilität von Zustandsänderungen ist additiv in dem Sinne, daß die Irreversibilität eines aus mehreren Teilprozessen zusammengesetzten Gesamtprozesses die Summe der einzelnen Irreversibilitäten ist.
3. Die Irreversibilität I eines Prozesses wird dargestellt als Differenz der Werte einer additiven Zustandsfunktion, der Entropie S .

Es fehlt leider der Platz zu zeigen, wie diese Begriffsbildung in naheliegender Weise aus der Erfahrungswelt von Schülern entwickelt werden kann – z. B. als Präzisierung einer zunächst unscharfen Vorstellung und Überlegungen zu grundlegenden Aussagen über die Entropie kommen kann ([2],[3]). Die entsprechenden Eigenschaften können hier nur zusammengestellt werden.

3. Eigenschaften der Entropie

Die Untersuchung von Reibungsvorgängen ergibt folgende Eigenschaften der Entropie:

(E1) Die Entropie jedes Körpers ist eine wachsende Funktion seiner Energie.

Für isotherme Reibungsvorgänge gilt:

- Die Entropiezunahme ist proportional zur umgesetzten Energie.
- Je höher die Temperatur ist, desto kleiner ist der mit einem bestimmten Energieumsatz verbundene Entropiezuwachs.

Oder kürzer:

Für die Entropie von Wärmebädern gilt

$$(E2) \quad \Delta S = c(\vartheta) \cdot \Delta E,$$

wobei $c(\vartheta)$ eine positiv definite, monoton fallende Funktion der Temperatur ϑ ist.

Aus den Eigenschaften des Temperatursausgleiches durch Wärmeleitung zwischen zwei ansonsten gleichen Körpern verschiedener Energie (bzw. Temperatur) folgt:

(E3) Die Entropie jedes Körpers ist eine konvexe Funktion seiner Energie:

$$\frac{S(E_1) + S(E_2)}{2} < S\left(\frac{E_1 + E_2}{2}\right)$$

Zusammen mit (E₁) ergibt sich daraus der in Abb. 1 dargestellte prinzipielle Verlauf der Entropie eines Körpers als Funktion seiner Energie. Auf der Grundlage dieser Aussagen kann die thermodynamische Temperatur als abgeleitete Größe eingeführt werden.



Abb. 1

4. Definition und Eigenschaften der thermodynamischen Temperatur

Um den Zusammenhang zwischen Temperatur, Entropie und Energie zu verdeutlichen, kann man (E2) folgendermaßen schreiben:

$$\vartheta_1 < \vartheta_2 \Leftrightarrow c(\vartheta_1) > c(\vartheta_2)$$

oder (noch etwas suggestiver)

$$\frac{1}{\vartheta_1} > \frac{1}{\vartheta_2} \Leftrightarrow \left. \frac{\Delta S}{\Delta E} \right|_1 > \left. \frac{\Delta S}{\Delta E} \right|_2 \quad (1)$$

Daß eine solche Beziehung nicht nur für Wärmebäder, sondern für beliebige Körper gilt, kann man sich folgendermaßen überlegen:

Bei der Wärmeleitung zwischen zwei Körpern A und B unterschiedlicher Temperatur ($\vartheta_A > \vartheta_B$) wächst die Entropie S_B von B aufgrund der Energiezufuhr ΔE , während die Entropie S_A von A wegen der entsprechenden Energieabgabe abnimmt. Da die Wärmeleitung aber irreversibel ist, die Gesamtentropie dabei also zunimmt, muß der Zuwachs von S_B größer als die Abnahme von S_A und damit – da diese Überlegung für beliebigen Energieumsatz gilt – die Steigung von S_B größer sein als die von S_A (siehe Abb. 2.).

In Anlehnung an (1) kann man das Ergebnis auch folgendermaßen schreiben:

$$\frac{1}{\vartheta_A} < \frac{1}{\vartheta_B} \Leftrightarrow \left. \frac{\delta S_A}{\delta E} \right|_{E_A} < \left. \frac{\delta S_B}{\delta E} \right|_{E_B} \quad (2)$$

Diese für alle Körper gültige Beziehung legt es nahe, an dieser Stelle des Unterrichtsganges gemäß

$$\frac{1}{T} := \left. \frac{\delta S}{\delta E} \right|_{V,n,\dots} \quad (3)$$

eine neue physikalische Größe – die sogenannte thermodynamische Temperatur T – einzuführen.

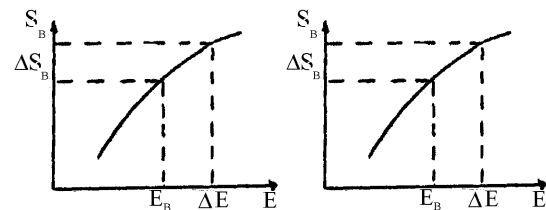


Abb. 2

Diese Temperatur ist absolut in folgendem Sinne: Für die Definition empirischer Temperaturen werden Eigenschaften spezieller Stoffe benutzt: z.B. die Wärmeausdehnung von Quecksilber für die Celsius-Temperatur oder das asymptotische Verhalten realer Gase bei sehr kleinen Drucken für die Ideale-Gas-Temperatur. Die thermodynamische Temperatur eines Körpers ist dagegen die Ableitung seiner Entropiefunktion nach der Energie. Es wird also kein spezieller Körper ausgezeichnet.

Die neue Größe beschreibt aufgrund ihrer Definition die bei Energietransport- und Energieumwandlungsprozessen pro Energieeinheit auftretenden Irreversibilitäten. Deshalb ist es z.B. möglich, sofort den Wirkungsgrad von Carnotmaschinen anzugeben:

$$\eta_c = 1 - \frac{\Delta E_B}{\Delta E_A} = 1 - \frac{T_B}{T_A} \quad (4)$$

5. Zusammenhang mit der Idealen-Gas-Temperatur

Die thermodynamische Temperatur hat jedoch im Rahmen des hier vorgeschlagenen Vorgehens noch einen „Schönheitsfehler“: es ist nicht klar, wie man sie messen kann, da Entropieänderungen i. a. schwierig zu bestimmen sind.

Prinzipiell ist es zunächst möglich, zur Messung reversible Energieumsetzungen zu benutzen, da dann die Temperaturbestimmung auf Energiemessungen zurückgeführt werden kann (siehe (4)).

Eine nicht nur prinzipielle Lösung des Problems ergibt sich folgendermaßen: Aufgrund der Allgemeinheit der Temperaturdefinition kann man jeden Körper als Thermometer benutzen, für den man die Energieabhängigkeit der Entropie kennt. Nun ist es aufgrund ähnlicher Überlegungen, wie sie zur Berechnung des Carnotschen Wirkungsgrades angestellt werden, möglich, diesen Zusammenhang für ideale Gase zu finden. Bevor der Gedankengang dazu angedeutet wird, sollte allerdings betont werden, daß zur Ableitung der bisherigen Aussagen über Entropie und thermodynamische Temperatur keinerlei Kenntnis über das Verhalten von Gasen notwendig war.

Um die Energieabhängigkeit der Entropie für ideale Gase zu finden, untersucht man gemäß dem vereinbarten Meßverfahren, wie oft eine Temperaturerhöhung eine andere mit Hilfe eines mechanischen Systems zurückspulen kann [4]. Dazu stellt man sich zwei durch eine starre Wand getrennte Mengen eines idealen Gases in einem adiabatisch abgeschlossenen Zylinder vor, der auf einer Seite mit einem durch ein mechanisches System beweglichen Kolben verschlossen ist. Durch die Temperaturerhöhung der einen Gasmenge kann nun die andere folgendermaßen abgekühlt werden: Zunächst wird das Gas 1 adiabatisch soweit komprimiert, daß seine Temperatur mit der von Gas 2 übereinstimmt. Dann wird die Trennwand wärmedurchlässig gemacht und das Volumen soweit vergrößert, daß die gemeinsame Temperatur auf die Anfangstemperatur von Gas 1 gesunken ist. Im letzten Schritt schließlich wird die Trennwand wieder wärmedurchlässig gemacht und Gas 1 so weit komprimiert, daß es die gewünschte Endtemperatur annimmt. Aus der Bedingung, daß sich auch für Gas 1 nur die Temperatur geändert haben soll, das Endvolumen also mit dem Anfangsvolumen übereinstimmen muß, ergibt sich dann eine Bedingungsangleichung, aus der, wenn die Ideale-Gas-Temperatur mit θ bezeichnet wird, für die Irreversibilität I der Temperaturerhöhung folgt:

$$I(\theta_0, \theta) \sim \ln \frac{\theta}{\theta_0} \quad (5)$$

Daraus ergibt sich aber, da bei idealen Gasen Energie und Temperatur zueinander proportional sind:

$$\frac{1}{T} = \frac{\delta S}{\delta E} \sim \frac{\delta S}{\delta \theta} \sim \frac{1}{\theta}$$

Wir haben damit ein wichtiges Naturgesetz gefunden:

Thermodynamische Temperatur und Ideale-Gas-Temperatur sind proportional zueinander: $T \sim \theta \quad (6)$
--

Mit der Messung der Idealen-Gas-Temperatur bestimmt man also – bis auf einen konstanten Faktor – auch die thermodynamische Temperatur.

6. Eichung der Entropie

Durch das angegebene Meßverfahren für die Irreversibilität von Prozessen können nur Verhältnisse von Entropieänderungen bestimmt werden. Die thermodynamische Temperatur ist deshalb nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, solange kein Prozeß ausgewählt worden ist, dem die „Einheitsirreversibilität“ zugeordnet werden soll. Jetzt ist es möglich, die Wahl so zu treffen, daß über die Proportionalität hinaus die Gleichheit der beiden Temperaturen gilt:

$$T = \theta \quad (7)$$

Konsequenterweise müßte die Entropie bei dem hier beschriebenen Vorgehen eine eigene Basiseinheit erhalten (z. B. „1 Clausius“). Die thermodynamische Temperatur hätte dann als abgeleitete Größe die Einheit „1 Joule/Clausius“, und in (7) stünde noch eine dimensionsbehaftete Konstante mit Zahlenwert 1. Wir schließen uns jedoch den üblichen Vereinbarungen an: Durch (7) erhält die Entropie die abgeleitete Einheit „1 Joule/Kelvin“.

Die Gültigkeit von (7) erreicht man durch folgende Festlegung:

Die Irreversibilität des Prozesses „Isotherme Dissipation von 273,15 J mechanischer Energie bei der Temperatur „ $\theta = 273,15 \text{ K}$ “ beträgt eine Einheit.

Erst aufgrund dieser Vereinbarung braucht zwischen thermodynamischer und Idealer-Gas-Temperatur nicht mehr unterschieden zu werden.

7. Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, wie die thermodynamische Temperatur als abgeleitete Größe definiert werden kann, wenn Energie und Entropie als Grundgrößen eingeführt werden. Sie wird dadurch zu einer Größe, die ein Maß für die bei Energietransport- und Energieumwandlungsprozessen pro Energieeinheit auftretenden Irreversibilitäten ist. Die thermodynamische Temperatur ist absolut in dem Sinne, daß ihre Definition unabhängig ist von speziellen Eigenschaften irgendeines Stoffes. Sie ist deshalb insbesondere begrifflich unabhängig vom Verhalten idealer Gase.

Die Übereinstimmung zwischen thermodynamischer und Idealer-Gas-Temperatur ergibt sich erst aufgrund eines Naturgesetzes, das die Proportionalität zwischen beiden Größen aussagt und einer aus Einfachheitsgründen getroffenen Vereinbarung. Die

bei der Ableitung des Gesetzes vorauszusetzenden physikalischen und mathematischen Kenntnisse und Fähigkeiten entsprechen zwar den zur Behandlung des Carnotschen Kreisprozesses notwendigen, jedoch können viele Aussagen über Entropie und Temperatur ohne einen entsprechenden Aufwand gewonnen werden.

Literatur:

1. Schlichting, H. J.; Backhaus, U.: Energie als grundlegendes Konzept, *PhuD* 7/2, 139 (1979)
2. Backhaus, U.; Schlichting, H. J.: Die Unumkehrbarkeit natürlicher Vorgänge *MNU* 33 (1980) (im Druck)
3. Schlichting, H. J.; Backhaus, U.: Vom Wert der Energie, *NiU* 28/12 (1980) (im Druck)
4. Backhaus, U.; Schlichting, H. J.: Die Einführung der Entropie als Irreversibilitätsmaß *MNU* 33 (1980) (im Druck)