

# Symmetriebruch am schwimmenden Stab

H. Joachim Schlichting, Udo Bachhaus, Ansgar Schlie

*C'est la dissymétrie qui crée le phénomène*

Pierre Curie

## Symmetriebruch

Symmetrie bedeutet im weitesten Wortsinn Wiederholung von Gleichartigem. In dem Maße, wie wissenschaftliche Forschung mit dem Aufdecken von Regelmäßigkeiten in der Natur befaßt ist, geht es so gesehen um die Suche nach Symmetrie. Die Symmetrie kann daher wohl mit Recht als das wirkungsvollste Ordnungsprinzip insbesondere der Naturwissenschaften angesehen werden. Pierre Curie wies bereits gegen Ende des vorigen Jahrhunderts darauf hin, daß Symmetriebetrachtungen geeignet sein können, auf neue Effekte aufmerksam zu machen, wenn man sein Augenmerk auf einen Symmetriebruch (dissymétrie) richtet, den man bei bestimmten (physikalischen) Vorgängen vorfinden kann. Denn „*dieser Symmetriebruch muß sich in den Ursachen, die ihn hervorgerufen haben, wiederfinden*“ [1]: Ein Symmetriebruch verweist auf die Eigenschaft eines Systems, Zustände verschiedener Ordnung einnehmen zu können. Wesentlich ist dabei, daß er nach universellen Gesetzmäßigkeiten organisiert ist, die für den Phasenübergang in einem Ferromagneten ebenso zutreffen wie für die spontane Entstehung von *Bénardzellen* auf einer von unten geheizten Flüssigkeitsschicht. Man spricht daher auch allgemein von kritischen oder phasenübergangsähnlichen Phänomenen [2].

Wir wollen uns die Universalität bei phasenübergangsähnlichen Vorgängen zunutze machen und an einem an sich vertrauten Phänomen die Charakteristika eines Symmetriebruchs studieren. Bei dem System handelt es sich um einen schwimmenden Stab. Die Beobachtung, daß ein solcher Stab je nach seiner eigenen oder der Dichte der Flüssigkeit, in der er schwimmt, verschiedene Lagen einnehmen kann, bildet den Ausgangspunkt unserer Untersuchungen. Diese Beobachtung ist wiederholt Gegenstand vor allem didaktischer Überlegungen gewesen [3-6]. Dabei wurden insbesondere die Bedingungen untersucht, unter denen das System die eine oder die andere Lage einnimmt. Uns interessiert im Sinne der vorangegangenen Bemerkungen, wie der augenscheinlich mit einem Symmetriebruch verbundene Übergang im einzelnen abläuft und welche universellen Verhaltensweisen dabei auftreten.

## Das System

Unser System besteht aus einer Flüssigkeit, in der ein (langer) Stab schwimmt, dessen Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck bildet. Wie man sich leicht experimentell klarmachen kann, hängt die Lage dieses Stabs vom Scheitelwinkel  $\Theta$  und vom Dichtevehrhältnis  $D$  zwischen Stab und Flüssigkeit ab: Ein schwerer in Wasser schwimmender Holzstab ( $1-D \ll 1$ ) mit mittlerem Scheitelwinkel wird beispielsweise mit der Grundseite parallel zur Flüssigkeitsoberfläche (FO) nur wenig aus dem Wasser herausragen. Demgegenüber wird ein gleich geformter leichter Stab ( $D \ll 1$ ) mit der Grundseite parallel zur FO nur wenig ins Wasser eintauchen.

Allgemein wollen wir die Lage des Stabes durch den Winkel  $f$  erfassen, den die Grundseite  $z$  mit der FO bildet (siehe Abb. 1). Die Gleichgewichtslage, die sich einstellt, wenn ein Kontrollparameter (im vorliegenden Fall das Dichtevehrhältnis  $D$  oder der Scheitelwinkel  $\Theta$ ) variiert wird, sehen wir als Ordnungsparameter  $\varphi_0$  unseres Systems (vgl. z.B. [7]) an. Er wird durch ein Minimum der potentiellen Energie  $U$  des Systems bestimmt. Diese hängt unter der Voraussetzung, daß sich die Höhe des Flüssigkeitsspiegels mit der Eintauchtiefe des Stabes nicht merklich ändern möge, nur von der Differenz der Abstände des Schwerpunktes des gesamten Stabes  $y_k$  und des untergetauchten Teilkörpers  $y_f$  von der FO ab:

$$U = mg(y_k - y_f).$$

Dabei ist  $m$  die Masse des Stabes,  $g$  die Erdbeschleunigung. Da der Stab als lang vorausgesetzt wurde und daher in Längsrichtung keine Veränderungen zeigt, können wir uns auf eine Betrachtung der dreieckigen Stirnfläche beschränken. Der Einfachheit halber berechnen wir zunächst die Koordinaten  $x_{sk}$ ,  $y_{sk}$  bzw.  $x_{sf}$ ,  $y_{sf}$  des Schwerpunkts der gesamten bzw. untergetauchten Stirnfläche bezüglich eines mit dem Dreieck fest verbundenen Koordinatensystems (Abb. 1), auf die sich  $y_k$  bzw.  $y_f$  dann durch eine einfache Transformation zurückführen läßt.

Man sieht sofort:  $x_{sk} = z/2$ ;  $y_{sk} = h/3$ , mit  $z = 2s \sin(\Theta/2)$  und  $h^2 = s^2 - z^2/4$ .

Bei der Ermittlung von  $x_{sf}$  und  $y_{sf}$  hat man vier topologisch verschiedene Situationen gesondert zu betrachten, je nachdem ob 1. die Grundseite, 2. die Ecke zwischen Grundseite und Schenkel, 3. eine Schenkelseite oder 4. die Ecke zwischen den Schenkeln eingetaucht ist.

Zu Abbildung 1:  $x_{sf}$  und  $y_{sf}$  berechnen wir (gem. Abb. 1) als das mit den Flächen  $A_d$  und  $A_t$  gewichtete Mittel aus den Schwerpunktskoordinaten  $x_{sd}$ ,  $y_{sd}$ ,  $x_{st}$  und  $y_{st}$  des Dreiecks und Trapezes, in die untergetauchte Fläche  $A_f$  zerlegt werden kann:

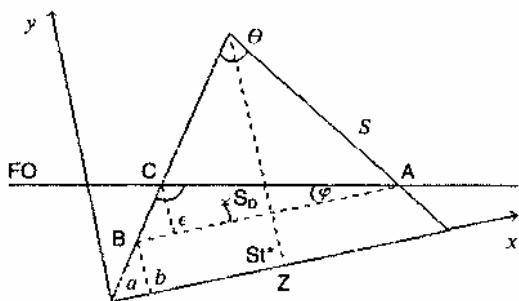


Abb. 1 : Skizze zur Erläuterung der verwendeten Symbole im Fall 1.

$$x_{sf} = (x_{sd} A_d + x_{st} A_t) \frac{1}{A_f},$$

$$y_{sf} = (y_{sd} A_d + y_{st} A_t) \frac{1}{A_f}.$$

Dabei sind:

$$x_{sd} = \frac{z}{2} + \frac{(z - 2t(b + c))}{6},$$

$$y_{sd} = \frac{c}{6},$$

$$b = \frac{z}{2t} \pm \sqrt{\frac{z}{2t} \sqrt{\frac{z}{2t} + \frac{(z\xi w - Dkh)}{(k - 2t\xi w)}}},$$

$$a = b \cdot \tan \frac{\Theta}{2},$$

$$t = \tan \frac{\Theta}{2},$$

$$\xi = \sin \varphi,$$

$$w = \cos \frac{\Theta}{2}, \quad k = \sin \varepsilon$$

Zu Abbildung 2: In diesem Fall müssen die Schwerpunktskoordinaten eines Dreiecks berechnet werden:

$$x_{sf} = z - \frac{1}{2} r - g,$$

$$y_{sf} = \frac{1}{3} h$$

$$h = a \cdot \sin \gamma,$$

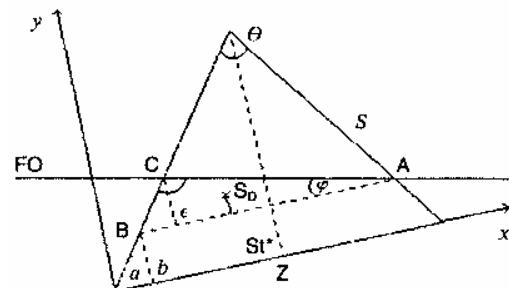


Abb. 2: Skizze zur Erläuterung der verwendeten Symbole im Fall 2

$$g = \frac{1}{3} m, \quad m = e - \frac{1}{2} r$$

$$e = a \cdot \sin \frac{\Theta}{2},$$

$$a = r \frac{\sin \varphi}{\sin \delta},$$

$$r = \sqrt{\frac{Dzh \sin \delta}{\sin \gamma \sin \varphi}}.$$

Zu 3.: Die untergetauchte Fläche hat die Form eines Vierecks, dessen Schwerpunktskoordinaten aus den Koordinaten des Schwerpunktes der gesamten und der nicht untergetauchten Fläche berechnet werden:

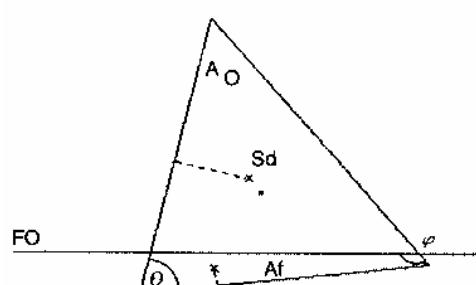


Abb.3: Skizze zur Erläuterung der verwendeten Symbole im Fall 3

$$x_{sf} = \frac{x_{sk} A - x_{sd} A_0}{A_f},$$

$$y_{sf} = \frac{y_{sk} A - y_{sd} A_0}{A_f}$$

Dabei ist:

$$A = \frac{1}{2} zh$$

$$A_f = \frac{1}{2} Dzh ,$$

$$A_0 = (1 - D) \frac{1}{2} zh .$$

Die Koordinaten  $x_{sd}$  und  $y_{sd}$  können wie im Fall 2. bestimmt werden, wenn für den Winkel  $\varphi$  der Winkel  $180^\circ - \varphi$  und für die Fläche  $A_s$  die Fläche  $A_0$  gesetzt wird

$$x_{sd} = \frac{1}{3} r \left( 1 + \sin \frac{\Theta}{2} \frac{\sin \varphi}{\sin \delta} \right) ,$$

$$y_{sd} = \frac{1}{3} r \frac{\sin \gamma \sin \varphi}{\sin \delta} .$$

Zu 4.: Die eingetauchte Fläche hat wieder die Form eines Dreiecks, dessen Schwerpunkt analog zu Fall 3. bestimmt wird:

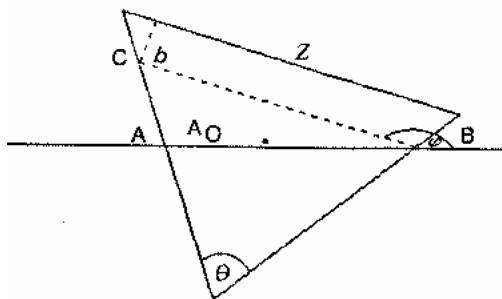


Abb.4: Skizze zur Erläuterung der Symbole für Fall 4.

$$x_{sf} = \frac{x_{sk} A - x_{sv} A_0}{A_f} , y_{sf} = \frac{y_{sk} A - y_{sv} A_0}{A_f}$$

$$\text{mit } A = \frac{1}{2} zh ,$$

$$A_f = \frac{1}{2} Dzh ,$$

$$A_0 = (1 - D) \frac{1}{2} zh .$$

Die Koordinaten  $x_{sv}$  und  $y_{sv}$  werden dann wie unter Fall 1. bestimmt, wobei für  $\varphi$  der Winkel  $180^\circ - \varphi$  und für  $A_f$  die Fläche  $A_0$  gesetzt wird. Außerdem ist eine Änderung bei der Bestimmung

der x-Koordinate des Schwerpunktes des Dreiecks ABC zu beachten:

$$x_{sd} = \frac{1}{2} z - g .$$

Da wir zur Bestimmung des Potentials U den Abstand der Schwerpunkte  $S_k$  und  $S_f$  zur FO benötigen, muß noch eine entsprechende Koordinatentransformation durchgeführt werden, d.h. es gilt:

$$U = mg(y_k - y_f)$$

$$\text{mit } y_k = y_{sk} \cos \varphi - x_{sk} \sin \varphi$$

$$\text{sowie } y_f = y_{sf} \cos \varphi - x_{sf} \sin \varphi .$$

## Gleichgewichtsverhalten

### Variation der Flüssigkeitsdichte

Die Lage des Stabes, beschrieben durch den Gleichgewichtswinkel  $\varphi_0$ , wird bestimmt durch die Minima der potentiellen Energie U. Wir betrachten zunächst, wie sich  $\varphi_0$  bei einem Stab vom Querschnitt eines gleichseitigen Dreiecks ( $\Theta = 60^\circ$ ) in Abhängigkeit von D ändert. Es zeigt sich, daß das Potential bei kleinem D ein ausgeprägtes Minimum bei  $\varphi = 0^\circ$  besitzt, das Dreieck also mit der Grundseite parallel zur FO schwimmt. Mit wachsendem D taucht der Körper zunächst unter Beibehaltung seiner Lage lediglich etwas tiefer in die Flüssigkeit ein. Dabei wird das Minimum bei zunehmend flacher. Bei  $D \approx 0.43$  wird die Lage des Stabes plötzlich instabil, was sich im Potentialverlauf dadurch bemerkbar macht, daß das ursprüngliche Minimum zu einem relativen Maximum wird und rechts davon zwei neue Minima auftreten (Abb. 5).

Diese so genannte *Bifurkation* verlangt dem System eine Entscheidung für eines der beiden Minima ab, die durch kleinste Störungen (*Fluktuationen*) getroffen wird und damit einen *Symmetrie-*

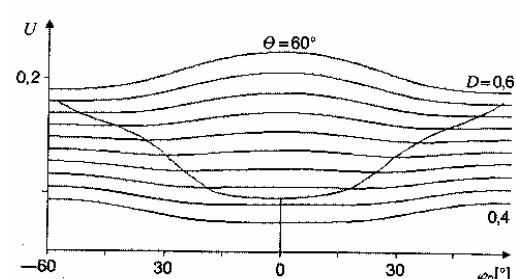


Abb. 5: Das Potential als Funktion der Lage  $\varphi$  im Bereich von  $-60^\circ$  bis  $+60^\circ$  für verschiedene Dichte-Verhältnisse D. Die Minima wurden miteinander verbunden, um die Bifurkation zu veranschaulichen

bruch bedingt: Der Stab dreht sich nach links oder nach rechts in ein neues Minimum  $\varphi_0 \neq 0^\circ$  hinein.

Eine weitere Zunahme von D führt zu einem weiteren Drehen des Stabes, bis er sich plötzlich bei  $D \approx 0.55$  mit einer anderen Seite parallel zu FO stellt. Diesem „Zurückspringen“ in die ursprüngliche Symmetrie entspricht eine Wiedervereinigung zweier Minima bei  $\varphi_0 = 60^\circ$ . Eine weitere Zunahme von D führt zu einer Stabilisierung der Lage verbunden mit einem weiteren Eintauchen des Stabs in die Flüssigkeit. Diese Symmetrieveränderungen zeigen eine weitgehende Analogie mit *Phasenübergängen 2. Art*, wie wir sie z.B. von einem Ferromagneten bei Überschreitung der *Curie-Temperatur* kennen (vgl.[2]).

Das wird besonders deutlich, wenn man den als Ordnungsparameter fungierenden Gleichgewichtswinkel als Funktion des Kontrollparameters D aufträgt (Abb. 6): Erniedrigt man D wieder, nachdem der Stab in die Lage  $\varphi_0 \neq 0^\circ$  hineinkippt ist, so werden dieselben Lagen in umgekehrter Richtung durchlaufen. Hat man jedoch D soweit erhöht, daß der Stab bereits wieder in die ursprüngliche Symmetrie entsprechende Lage ( $\varphi_0 = 60^\circ$ ) gekippt ist (s.o.), so hängt es wiederum vom Zufall ab, ob derselbe „Rückweg“ eingeschlagen wird oder ob sich der Stab in derselben Richtung weiterdreht, um die der Ausgangslage äquivalente Lage bei  $\varphi_0 = 120^\circ$  einzunehmen. Die den beiden Symmetrieveränderungen entsprechenden Bifurkationen sind gewissermaßen gegeneinander geschaltet.

Bricht man jedoch die dreizählige Drehsymmetrie des Stabes von Anfang an, indem man mit einem Stab von nur gleichschenkligem Querschnitt startet, so treten zwei verschiedene neue Effekte auf, je nachdem ob der Scheitelwinkel  $\Theta < 60^\circ$  oder  $\Theta > 60^\circ$  ist. Im ersten Fall verschwindet die zweite Bifurkation. Der von  $\varphi_0 = 0^\circ$  ausgehende Weg wird zu einer Art Einbahnstraße (Abb. 7), weil es (von sehr großen Störungen abgesehen) keinen Rückweg gibt. Das ist auch anschaulich klar: Hat sich der Stab erst einmal auf einen der langen Schenkel gelegt, so pendelt er mit zu- und abnehmendem D nur noch zwischen dieser und der Lage hin und her, in der die Grundseite aus der Flüssigkeit (parallel zur FO) ragt. Im Fall  $\Theta > 60^\circ$  erreicht man den Zustand, in dem sich außer der langen Grundseite ein Schenkel parallel zur FO stellt, überhaupt nicht (Abb. 8).

Holzstäbe mit verschiedenem  $\Theta$  in die Flüssigkeit setzt), so erhält man u.a. Symmetrieveränderungen, die *Phasenübergängen 1. Art* analog sind [5]. Die Analogie ist vollständig, wenn man in der Nähe von  $D = 0.5$  experimentiert. (Sie ist allerdings experimentell wohl kaum zu verifizieren.)

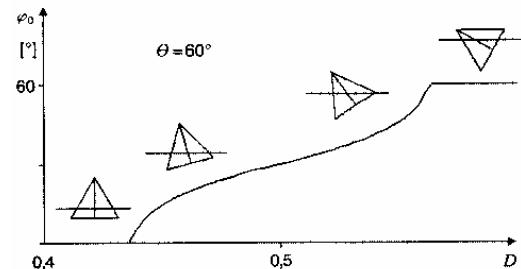


Abb.6: Der Gleichgewichtswinkel als Funktion von D. Bei einem kritischen Wert von D treten plötzlich zwei Minima auf (Nur ein Ast gezeichnet)

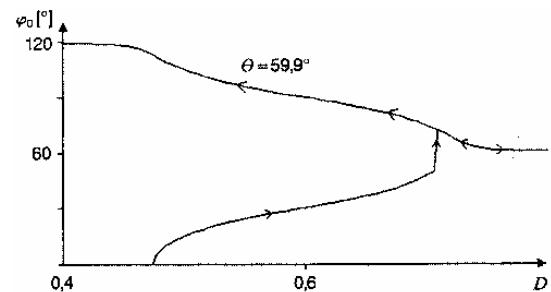


Abb.7: Unterschreitet  $\Theta$  die symmetrische Situation von  $60^\circ$  auch nur geringfügig, so kann die Ausgangslage  $\varphi_0=0^\circ$  nicht wieder erreicht werden

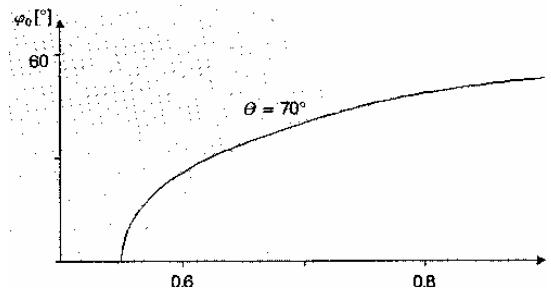


Abb.8: Bei Stäben mit  $\Theta > 60^\circ$  gibt es nur eine Bifurkation. Dieses Verhalten entspricht dem eines klass. Phasenübergangs am ehesten

## Variation des Scheitelwinkels

Hält man D konstant und variiert stattdessen den Scheitelwinkel  $\Theta$  (z.B. indem man entsprechende

Typisch dafür ist das Auftreten einer Hysterese im  $\varphi_0$ - $\Theta$ -Diagramm (Abb. 9): Je nachdem, ob  $\Theta$  vergrößert oder verkleinert wird, tritt der Symmetriebruch früher oder später auf. In Abb. 10 wurde der entsprechende Potentialverlauf dargestellt. Bei größeren Abweichungen von  $D = 0.5$  verschwindet die Hysterese wieder (Abb. 11-12), und es stellt sich (wenigstens in begrenzten Bereichen) wieder ein Verhalten ein, das den obigen modifizierten Phasenübergängen 2. Art infolge

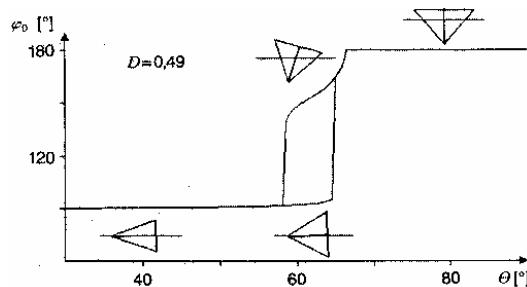


Abb. 9: Auftreten einer Hysterese im  $\varphi_0$ - $\Theta$ -Diagramm für  $D = 0,49$

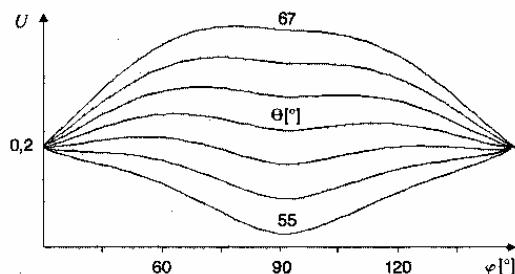


Abb. 10: Ausschnitt aus dem Potentialverlauf für einen Phasenübergang 1. Art

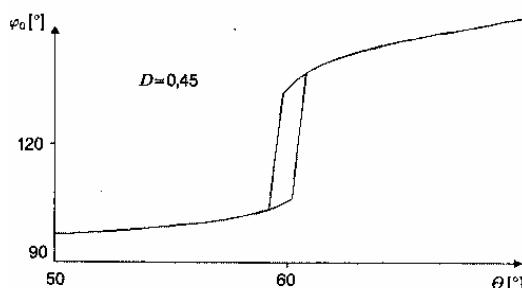


Abb. 11: Für größere Abweichungen von  $D = 0,5$  wird die Hysterese kleiner

der Variation der Dichte ähnlich ist.

Um sich einen Überblick über alle Verhaltensmöglichkeiten eines Stabs bei Variation eines Parameters zu verschaffen, ist es zweckmäßig, sich die entsprechenden Potentialverläufe über den gesamten Winkelbereich anzusehen (z.B. Abb. 13 und 14)

## Experimente

Zum Abschluß sollen einige Hinweise zur experimentellen Darstellung der Symmetriebrüche angegeben werden. Dabei beschränken wir uns auf Versuche, die mit einfachen Mitteln gewissermaßen freihand möglich sind.

Zur Demonstration der kontinuierlichen Symmetriebrüche (Variation der Dichte) empfiehlt es sich, einen exakt gearbeiteten Holzstab geeigneter Dichte zu benutzen. Als Flüssigkeit bietet sich Wasser an, das mit Hilfe von Salz oder Zucker in der Dichte variiert werden kann. Zucker hat den Vorteil, daß man durch Erwärmen des Wassers und kräftiges Rühren (Magnetrührer), relativ stark konzentrierte Lösungen, also relativ große Dichten herstellen kann. Nachteile sind die extreme Klebrigkeit und Temperaturabhängigkeit, die dem Experimentator einiges Geschick abverlangen. Unter diesen Bedingungen haben wir die theoretisch erwarteten Symmetriebrüchen zumindest qualitativ verifizieren können.

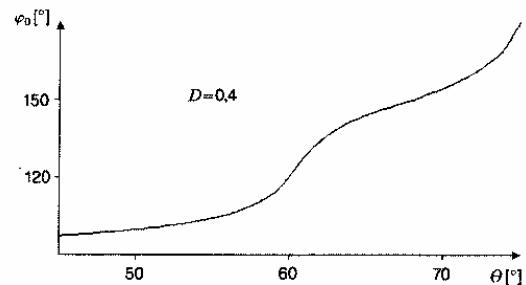


Abb. 12: Die Hysterese verschwindet schließlich ganz

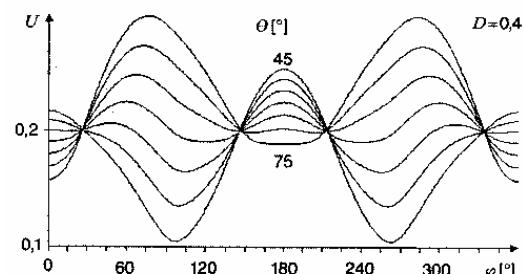


Abb. 13: Der vollständige Potentialverlauf  $D = 0,4$

Zur Darstellung der Symmetriebrüche bei Variation des Scheitelwinkels kommt man vermutlich nicht umhin, verschiedene Holzstäbe mit unterschiedlichen Scheitelwinkeln nacheinander in die jeweilige Flüssigkeit zu legen. Auch hier wird man sich i.a. auf qualitative Ergebnisse beschränken müssen.

## Fazit

Symmetriebrüche sind Erscheinungen, die bereits an einfachen Systemen. Ihre Bedeutung liegt zum einen in der Universalität ihres Auftretens. Völlig verschiedene Systeme wie Ferromagneten, schwimmende Stäbe, Stehpendedel [7], aber auch

[9] Schlichting, H.J.: Zu Phasenübergängen. Physik und Didaktik 16/2, 163 (1988).

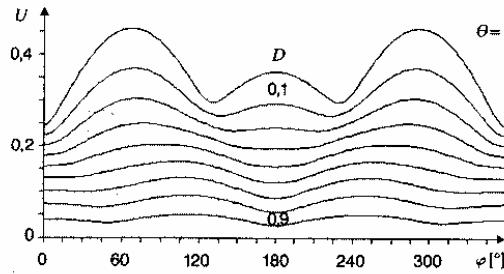


Abb. 14: Der vollständige Potentialverlauf für  $\Theta = 75^\circ$

Ökosysteme u.ä. zeigen ein qualitativ analoges Verhalten. (Eine Sammlung von Freihandversuchen findet man in [8]). Daher reicht i.a. die lediglich qualitative experimentelle Darstellung der Symmetriebrüche aus. Zum anderen sind Symmetriebrüche Erscheinungen, die zum Verständnis von Vorgängen in der Umwelt von Bedeutung sind [9]. Einfache Systeme wie der schwimmende Stab können helfen, diese Vorgänge zu veranschaulichen und modellmäßig zu erfassen.

## Literatur

- [1] Curie, P.: Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champs électrique et d'un champs magnétique. *J. de Physique* 3, 393 (1894).
- [2] Rodewald, B.: Phasenübergangsähnliche Phänomene in der Mechanik. *PdN-Ph* 32/2, 35 (1983).
- [3] Berge, O.E.: Wie schwimmt eine quadratische Säule. *MNU* 32, 214 (1979).
- [4] Bergold, H.: Überraschungen mit dem schwimmenden Balken. *Physik und Didaktik* 3, 175 (1978).
- [5] Wode, D.: Zum Schwimmverhalten einer quadratischen Säule. *MNU* 34/1, 18 (1981).
- [6] Delbourgo, E.: The floating plank. *Am. J. Phys.* 55/9, 799 (1987).
- [7] Schlichting, H.J., Rodewald, B.: Zum kritischen Verhalten eines invertierten Pendels. *Physik und Didaktik* 15/1, 38 (1977).
- [8] Rodewald, B., Schlichting, H.J.: Ein Spielzeug zur Veranschaulichung von Katastrophen in Ökosystemen. *NiU-P/C* 33/8, 294 (1984).