Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2015/16

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 13** **26.01.2016**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei U ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}_2$, der invariant ist unter Stoppen. Dies bedeutet, dass für jedes $M \in U$ und jede Stoppzeit τ der gestoppte Prozeß M^τ wieder in U enthalten ist. Zeigen Sie, dass das orthogonale Komplement V von U auch invariant ist unter Stoppen. Dabei heißen zwei Martingale $M, N \in \mathcal{H}_2$ senkrecht zueinander, falls $\mathbb{E} M_\infty N_\infty = 0$ gilt.

Zeigen Sie weiter, dass im obigen Falle U, V auch stark komplementär sind. Dies bedeutet, dass für Martingale $M \in U$ und $N \in V$ die quadratische Kovariation $\langle M, N \rangle = 0$ ist. Wieso folgt hieraus, dass $(M(t)N(t))_{t \geq 0}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal ist.

Wieso ist das Bild des stochastischen Integralprozessoperators

$$\{H \cdot M : H \in L_2(\mu_M)\}$$

invariant unter Stoppen?

Aufgabe 2: 4 Punkte

Seien μ und σ previsible Prozesse mit $\int_0^t |\mu(s)| ds < \infty$ und $\int_0^t \sigma^2(s) ds < \infty$ für alle $t \geq 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Seien W ein Wiener-Prozess und S eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t))$$

mit Anfangswert ζ. Sei weiter Z eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dZ(t) = Z(t)(\mu(t)dt + |\sigma(t)|dW(t))$$

mit gleichem Anfangswert ζ.

Zeigen Sie, dass S und Z die gleiche Verteilung haben.

Aufgabe 3: 4 Punkte

1. **quadrierter Besselprozeß**

   Sei W ein n- dimensionaler Wiener-Prozeß. Für $a \neq 0$ setzen wir $X(t) = a + W(t)$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass es einen Wiener-Prozess B gibt, so dass $Y(t) = |X(t)|^2$ die stochastische Differentialgleichung

   $$dY(t) = 2\sqrt{Y(t)}dB(t) + ndt$$

   mit Anfangswert $|a|^2$ erfüllt.

   Y heißt quadrierter Besselprozeß der Dimension n.

2. **quadrierter Ornstein-Uhlenbeck Prozeß**

   Sei X ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess und damit Lösung der Gleichung

   $$dX(t) = -X(t)dt + dW(t)$$

   zu einem Startwert $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass es einen Wiener-Prozess B gibt, so dass $Y(t) = X(t)^2$ die Gleichung

   $$dY(t) = (1 - 2Y(t))dt + 2\sqrt{|Y(t)|}dB(t)$$

   zum Anfangswert a^2 löst.

   Y heißt quadrierter Ornstein-Uhlenbeck Prozess der Dimension 1.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei X ein reelles stetiges Semimartingal und F eine streng monoton wachsende C^1-Funktion. Definiere das laufende Maximum durch $\hat{X}_t = \max_{0 \leq s \leq t} X_s$ für alle $t \geq 0$. Das Azéma-Yor Semimartingal M^F ist dann definiert durch

$$M^F(t) = F(\hat{X}_t) - F'(\hat{X}_t)(\hat{X}_t - X_t).$$

Zeigen Sie die folgende Integraldarstellung von M^F

$$M^F(t) = F(X_0) + \int_0^t F'(\hat{X}_s)dX_s.$$

für alle $t \geq 0$.

Fragestunde: Bei Fragen zur Vorlesung und zu den Aufgaben, können Sie mich am Montag von 10:00-11:00 und 13:30-14:30 in meinem Büro erreichen.

Abgabe: Mi. 03.02.2016 bis spätestens 10.00 im Fach 145