**Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis**

**Wintersemester 2015/16**

**PD Dr. V. Paulsen** **Blatt 12** **19.01.2016**

**Aufgabe 1:** 4 Punkte

Seien $M, Y$ stetige Semimartingale und $X$ eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = dM_t + X_t dY_t$$

mit Anfangsbedingung $X_0 = \zeta$ .

Zeigen Sie, dass $X$ gegeben ist durch

$$X_t = \mathfrak{E}(Y)_t(\zeta + \int_0^t \frac{1}{\mathfrak{E}(Y)_s} dM_s - \int_0^t \frac{1}{\mathfrak{E}(Y)_s} d\langle M, Y\rangle_s)$$

für alle $t \geq 0$.

**Aufgabe 2:** 4 Punkte

Sei $X$ ein stetiges lokales Martingal mit $\mathbb{P}(X_t > 0 \text{ f.a. } t \geq 0) = 1$. Zeigen Sie, dass dann ein lokales Martingal $M$ existiert mit

$$X_t = X_0 \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t)$$

für alle $t \geq 0$ $\mathbb{P}$- fast sicher.

**Aufgabe 3:** 4 Punkte

Seien $W_1$ und $W_2$ Wiener-Prozesse mit $\langle W_1, W_2\rangle_t = \rho t$ für alle $t \geq 0$ für ein $\rho \in (-1, 1)$. Definiere die Semimartingale $S_1, S_2$ durch

$$S_1(t) = \exp(\sigma_1 W_1(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t), S_2(t) = \exp(\sigma_2 W_2(t) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t)$$

für alle $t \geq 0$. Bestimmen Sie eine stochastische Differentialgleichung, die $\frac{S_1}{S_2}$ erfüllt.

**Aufgabe 4:** 4 Punkte

Zeigen Sie die folgende in der Vorlesung angegebene Version der Ito-Formel. Seien $X$ ein stetiges Semimartingal und $B$ ein $FV_c$ Prozess. Dann stimmt für jede $C^{1,2}$ Funktion $f$ der Prozess $(f(B_t, X_t))_{t\geq 0}$ bis auf Nichtunterscheidbarkeit mit dem Integralprozess

$$f(B_0, X_0) + \int_0^\cdot \partial_b f(B_s, X_s) dB_s + \int_0^\cdot \partial_x f(B_s, X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^\cdot \partial_x^2 f(B_s, X_s) d\langle X\rangle_s$$

überein.

**Fragestunde:** Bei Fragen zur Vorlesung und zu den Aufgaben, können Sie mich am Montag von 10:00-11:00 und 13:30-14:30 in meinem Büro erreichen.

**Abgabe:** Mi. 27.01.2016 bis spätestens 10.00 im Fach 145