Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2015/16

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 11** **12.01.2016**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Zeigen Sie die folgende partielle Integrationsformel für lokale Martingale.

Für $M, N \in \mathfrak{M}_{c,loc}$ ist der stochastische Prozess $(M_t N_t)_{t\geq 0}$ nicht unterscheidbar von

$$M_0 N_0 + (M \cdot N) + (N \cdot M) + \langle M, N \rangle.$$

Wieso sind die stochastischen Integralprozesse wohldefiniert?

Aufgabe 2: 2 Punkte

Zeigen Sie die folgende Formel für den Wiener-Prozess W.

$$W_t^3 = tW_t + 3\int_0^t W_s^2 dW_s - \int_0^t s dW_s + 2\int_0^t W_s ds$$

für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozess. Geben Sie die Semimartingaldarstellung für $(W_t^{2n})_{t\geq 0}$ an und nutzen Sie diese zur Berechnung von $\mu_{2n}(t) = \mathbb{E}W_t^{2n}$.

Hinweis: Gehen Sie induktiv vor.

Aufgabe 4: Brownsche Brücke 6 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozess. Für einen Endzeitpunkt $T > 0$ und einen Endpunkt $b \in \mathbb{R}$ soll ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t<T}$ angegeben werden, der sich verhält wie ein Wiener-Prozess W - gegeben $W(T) = b$. Definiere hierzu

$$X_t = b\frac{t}{T} + (T-t)\int_0^t \frac{1}{T-s} dW_s$$

für alle $0 \leq t < T$.

Zeigen Sie

1. X ist ein Semimartingal,
2. $M_t = \int_0^t \frac{1}{T-s} dW_s, 0 \leq t < T$ ist ein L_2 Martingal aber kein $\mathcal{H}_2$ Martingal,
3. M hat unabhängige Zuwächse
4. $\mathbb{E}X_t = b\frac{t}{T}$, $\mathrm{Var}X_t = (T-t)^2(\frac{1}{T-t} - \frac{1}{T})$ für alle $0 \leq t < T$

5. $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = (s \wedge t) - \frac{st}{T}$ für alle $0 \leq s, t < T$,

6. Die Verteilung von $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_k})$ ist eine k-dimensionale Normalverteilung für k Zeitpunkte $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < T$.

7. X ist eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = \frac{b - X_t}{T - t} dt + dW_t,$$

mit Anfangsbedingung $X_0 = 0$, i.e.

$$X_t = \int_0^t \frac{b - X_s}{T - s} ds + W_t$$

für alle $0 \leq t < T$.

Hinweis:

Definition eines Integralprozesses auf einem Intervall $[0, T)$

Statt der Betrachtung auf dem Zeitintervall $[0, \infty)$ kann auch die stochastische Integrationstheorie für Martingale bzw. lokale Martingale durchgeführt werden, wenn diese nur auf einem Zeitintervall $[0, T)$ definiert sind. Salope gesagt ist dazu ∞ überall durch T zu ersetzen. Beispielsweise ist ein stochastischer Prozeß $(M_t)_{0 \leq t < T}$ dann ein lokales Martingal, wenn es eine aufsteigende Folge von Stopzeiten $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n < \infty$, so dass M^{τ_n} ein Martingal ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Für ein $M \in \mathfrak{M}_{c,loc}$ und $H \in L^2_{loc}(M)$ kann dann der stochastische Integralprozeß $((H \cdot M)_t)_{0 \leq t < T}$ in zur Vorlesung analogen Weise definiert werden.

Fragestunde: Bei Fragen zur Vorlesung und zu den Aufgaben, können Sie mich am Montag von 10:00-11:00 und 13:30-14:30 in meinem Büro erreichen.

Abgabe: Mi. 20.01.2016 bis spätestens 10.00 im Fach 145