Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2015/16

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 10** **22.12.2015**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Seien $M \in \mathfrak{M}^0_{c,loc}$ und $H \in L^2_{loc}(M)$. Zeigen Sie:

1. $(H \cdot M)^\tau = H 1_{(0,\tau]} \cdot M^\tau$ für jede Stoppzeit τ. Dies ist die Verträglichkeit mit Stoppen.
2. Ist $K \in L^2_{loc}(H \cdot M)$, so ist $KH \in L^2_{loc}(M)$ und es gilt

   $$K \cdot (H \cdot M) = (KH) \cdot M.$$

   Dies ist die Assoziativität.
3. $$(H + K) \cdot M = H \cdot M + K \cdot M$$

   für alle $H, K \in L^2_{loc}(M)$. Dies ist die Linearität im Integranden
4. Für $N \in \mathfrak{M}^0_{c,loc}$ und $H \in L^2_{loc}(M) \cap L^2_{loc}(N)$ gilt $H \in L^2_{loc}(M + N)$ und

   $$H \cdot (M + N) = H \cdot M + H \cdot N.$$

   Dies ist die Linearität im Integrator.

Aufgabe 2: 2 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozess. Für $0 < a < b$ seien $\tau = \inf\{t \geq 0 : W_t = a\}$ und $\sigma = \inf\{t > \tau : |W_t| = b\}$ gesetzt.

1. Ist $H = 1_{(\tau,\sigma]} \in L_2(\mu_W)$? Ist $H = 1_{(\tau,\sigma]} \in L^2_{loc}(W)$? Ist $H = 1_{(\tau,\sigma]} \in lb\mathcal{P}$?
2. Bestimmen Sie $H \cdot W$ und $\langle H \cdot W \rangle$.

Aufgabe 3: 2 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozess. Für $x > 0$ sei die Erstaustrittszeit τ_x aus dem Intervall $(-\infty, x)$ definiert durch $\tau_x = \inf\{t \geq 0 : W_t \geq x\}$. Für $0 < a < b < c$ definieren wir den Prozess H durch

$$H = 1_{(0,\tau_a]} + 1_{(\tau_b,\tau_c]}.$$

1. Ist $H \in L_2(\mu_W)$? Ist $H \in L^2_{loc}(W)$? Ist $H \in lb\mathcal{P}$?
2. Bestimmen Sie $H \cdot W$ und $\langle H \cdot W \rangle$.

3. Ist $H \cdot W$ ein Martingal? Ist $H \cdot W$ ein $\mathcal{H}_{2,c}$-Martingal ?

Aufgabe 4: 4 Punkte

Seien $M, N \in \mathfrak{M}_{c,loc}$ und $H \in L^2_{loc}(M)$. Zeigen Sie, dass

$$\langle H \cdot M, N \rangle = \int_0^{\cdot} H_s d\langle M, N \rangle_s$$

gilt. Damit folgt insbesondere

$$\langle H \cdot M, K \cdot N \rangle = \int_0^{\cdot} H_s K_s d\langle M, N \rangle_s$$

für alle $K \in L^2_{loc}(N)$.

Um zu zeigen, dass die rechten Seiten wohldefiniert sind, können Sie die Kunita-Watanabe Ungleichung für lokale Martingale benutzen. Diese besagt, dass für $M, N \in \mathfrak{M}_{c,loc}$ und progressiv messbare Prozesse H, K gilt

$$\int_0^t |H_s||K_s) d||\langle M, N \rangle||_s \leq (\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s)^{\frac{1}{2}} (\int_0^t K_s^2 d\langle N \rangle_s)^{\frac{1}{2}}$$

für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 5: 4 Punkte

Sei M ein stetiges lokales Martingal. Zeigen Sie, dass $(M_t)_{t \geq 0}$ punktweise $\mathbb{P}$-fast sicher konvergent ist auf dem Ereignis $\{\langle M \rangle < \infty\}$.

Fragestunde: Bei Fragen zur Vorlesung und zu den Aufgaben, können Sie mich am Montag von 10:00-11:00 und 13:30-14:30 in meinem Büro erreichen.

Abgabe: Mi. 13.01.2016 bis spätestens 10.00 im Fach 145