Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2015/16

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 09** **15.12.2015**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Seien M, N stetige L_2-Martingale und Π_n , $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegungsfolge $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots$ mit $\sup_i t_i^n = \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $|\pi_n| = \sup_i t_i^n - t_{i-1}^n \to 0$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass die quadratische Kovariation der Pfade von M, N entlang des Gitters gegen den quadratischen Variationsprozeß in Wahrscheinlichleit konvergiert. Für

$$KV_n(t) = \sum_i (M(t_i^n \wedge t) - M(t_{i-1}^n) \wedge t)(N(t_i^n \wedge t) - N(t_{i-1}^n \wedge t))$$

für alle $t \geq 0$ ist also zu zeigen, dass

$$\sup_{t \leq T} |KV_n(t) - < M, N >_t | \to 0$$

in Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$.

Aufgabe 2: 4 Punkte

1. Sei M ein stetiges lokales Martingal mit $M_t \geq 0$ für alle $t \geq 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher und integrierbarem M_0. Zeigen Sie, dass dann M ein Supermartingal ist.

   Hinweis: Lemma von Fatou für bedingte Erwartungswerte.

2. Zeigen Sie, dass
$$b(\mathfrak{M}^0_{c,loc}) \subset b\mathfrak{M}^0_c$$
   gilt.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozess. Für $x > 0$ sei die Erstaustrittszeit τ_x aus dem Intervall $(-x, x)$ definiert durch $\tau_x = \inf\{t \geq 0 : |W_t| \geq x\}$. Für $0 < a < b < c$ definieren wir den Prozess H durch

$$H = 1_{(0,\tau_a]} + 1_{(\tau_b,\tau_c]}.$$

1. Ist $H \in L_2(\mu_W)$?

2. Bestimmen Sie $H \cdot W$ und $\langle H \cdot W \rangle$.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge von Stoppzeiten mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n = +\infty$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Seien weiter M, N Prozesse, so dass M^{τ_n} nicht unterscheidbar ist von N^{τ_n} für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass dann auch der Prozess M nicht unterscheidbar ist von N.

Fragestunde: Bei Fragen zur Vorlesung und zu den Aufgaben, können Sie mich am Montag von 10:00-11:00 und 13:30-14:30 in meinem Büro erreichen.

Abgabe: Do. 07.01.2015 bis spätestens 10.00 im Fach 145