Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2015/16

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 07** **01.12.2015**

Aufgabe 1: Zeittransformierter Wiener-Prozess 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ und $\eta : [0,\infty) \to [0,T)$ eine monoton wachsende, rechtsseitig stetige Funktion mit $\eta(0) = 0$. Definiere den stochastischen Prozeß $(M_t)_{t\geq 0}$ durch

$$M_t = W(\eta(t))$$

und die Filtration $\mathfrak{G}_t = \mathfrak{F}_{\eta(t)}$ für alle $t \geq 0$.

1. Zeigen Sie, dass M ein L_2-Martingal mit cádlág Pfaden bezüglich $(\mathfrak{G}_t)_{t\geq 0}$ ist.
2. Bestimmen Sie das zu M gehörige Doleansmaß.
3. Bestimmen Sie $L_2(\mu_M)$ für den Fall, dass η streng monoton wachsend und differenzierbar ist. Zeigen Sie weiter, dass für $H \in L_2(\mu_M)$ der Prozess K definiert durch $K(t) = H(\eta^{-1}(t))1_{[0,T)}(t)$ in $L_2(\mu_W)$ enthalten ist und
$$\int H(s)dM_s = \int K(t)dW(t)$$
gilt.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei Y eine $\mathfrak{F}_0$ meßbare Zufallsvariable mit $\mathbb{E}Y^2 < \infty$. Definiere das konstante Martingal M durch $M_t = Y$ für alle $t \geq 0$.

1. Ist $M \in \mathcal{H}_{2,c}$? Ist $M \in b\mathfrak{M}_c$?
2. Was ist μ_M? Was ist $L_2(\mu_M)$?
3. Was ist $\int HdM$ für alle $H \in L_2(\mu_M)$.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Geben Sie ein beschränktes Martingal an, dessen quadratischer Variationsprozess unbeschränkt ist.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Zeigen Sie, dass der quadratische Variationsprozeß die folgenden Eigenschaften besitzt.

1. $< cM >= c^2 < M >$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und alle stetigen L_2-Martingale M.
2. $< M + N > + < M - N >= 2(< M > + < N >)$
   für alle stetigen L_2-Martingale M, N.

Folgern Sie hieraus, dass durch

$$< M, N >= \frac{1}{4}(< M + N > - < M - N >)$$

für alle stetigen L_2-Martingale M, N eine bilineare Abbildung definiert wird.

Fragestunde: Bei Fragen zur Vorlesung und zu den Aufgaben, können Sie mich am Montag von 13:30-14:30 in meinem Büro erreichen.

Abgabe: Mi. 09.12.2015 bis spätestens 12.00 im Fach 145