Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2015/16

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 06** **24.11.2015**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozess bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$. Definiere für $\theta \in \mathbb{R}$ das Martingal M durch

$$M(t) = \exp(\theta W(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t)$$

für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass das Doleans-Maß μ_M die Gleichung

$$\mu_M(A) = \mathbb{E}\int 1_A(t,\omega)\theta^2 M_t^2 dt$$

für alle previsiblen Mengen A erfüllt.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Für eine bezüglich des Lebesgue-Maßes quadratintegrierbare Funktion f definieren wir $H(t,\omega) = f(t)$ für alle $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$. Zeigen Sie:

1. H ist previsibel,
2. Bestimmen sie $\mathbb{E}I(H)$, $\mathrm{Var}I(H)$ mit $I(H) = \int H\,dW$,
3. $I(H)$ ist eine normalverteilte Zufallsvariable,
4. $H \cdot W$ hat unabhängige Zuwächse.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Sei M ein L_2-Martingal mit cadlag Pfaden und $K \in L_2(\mu_M)$. Zeigen Sie die in der Vorlesung benutzte Identität

$$H \cdot (K \cdot M) = (HK) \cdot M$$

für alle $H \in \mathfrak{E}$.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei M ein L_2-Martingal mit cadlag Pfaden und τ eine beliebige Stoppzeit. Zeigen Sie:

1. $\mu_{M^\tau} \leq \mu_M$,
2. $L_2(\mu_M) \subset L_2(\mu_{M^\tau})$,

3. Ist H previsibel, so auch H^τ,
4. Ist $H \in L_2(\mu_M)$, so gilt $(H \cdot M)^\tau = (H^\tau \cdot M^\tau)$,
5. Sind H ein beschränkter previsibler Prozeß und $M \in \mathcal{H}_2$, so gilt

$$H^\tau \cdot M = H 1_{(0,\tau]} \cdot M + H_\tau (M - M^\tau).$$

Abgabe: Mi. 02.12.2015 bis spätestens 12.00 im Fach 145