Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2015/16

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 05** **17.11.2015**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei M ein L_2-Martingal mit cadlag Pfaden und $M_0 = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Zeigen Sie

1. Für jede beschränkte Stoppzeit τ gilt
$$\mu_M((0,\tau]) = \mathbb{E}M_\tau^2.$$
2. Geben Sie ein Beispiel für eine Stoppzeit und ein Martingal, wo obige Gleichung nicht erfüllt ist.
3. Für jede Stoppzeit τ mit $\mu_M((0,\tau])) < \infty$ ist der gestoppte Prozeß M^τ ein $\mathcal{H}_2$-Martingal und damit gilt
$$\mu_M((0,\tau]) = \mathbb{E}M_\tau^2.$$

Aufgabe 2: 4 Punkte

Seien W ein Wiener-Prozeß bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ und τ eine beliebige $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ Stoppzeit. Zeigen Sie

1. $\mu_W((0,\tau]) = \mathbb{E}\,\tau$.
2. Ist $\mathbb{E}\,\tau < \infty$, so gilt $\mathbb{E}W_\tau^2 = \mathbb{E}\,\tau$.
3. Ist $(t_j^n)_{j=0..l(n)}$ eine Zerlegunsfolge des Intervalls $[0,T]$, deren Feinheit gegen 0 strebt, so gilt
$$\sum_{j=1}^{l(n)}(W_{t_j^n} - W_{t_{j-1}^n})^2 \to T$$
in $L_2(P)$.
4. Ist τ beschränkt, σ eine weitere Stopzeit mit $\sigma \leq \tau$ und Y eine $\mathfrak{F}_\sigma$ meßbare quadrat-integrierbare Zufallsvariable, so gilt
$$\int Y 1_{(\sigma,\tau]} dW = Y(W_\tau - W_\sigma).$$

Aufgabe 3: 4 Punkte

Seien M ein L_2-Martingal mit cadlag Pfaden und σ, τ $\mathbb{P}$-fast sichere endliche Stoppzeiten mit $\sigma \leq \tau$ und $\mu_M((\sigma,\tau]) < \infty$. Zeigen Sie
$$\int Y 1_{(\sigma,\tau]} dM = Y(M_\tau - M_\sigma)$$

für jede beschränkte $\mathfrak{F}_\sigma$-meßbare Zufallsvariable Y.

Ist M ein $\mathcal{H}_2$-Martingal und sind σ, τ beliebige Stoppzeiten mit $\sigma \leq \tau$, so gilt

$$\int Y 1_{(\sigma,\tau]} dM = Y(M_\tau - M_\sigma)$$

für jede beschränkte $\mathfrak{F}_\sigma$-meßbare Zufallsvariable Y.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei M ein L_2-Martingal mit cadlag Pfaden und τ eine beliebige Stoppzeit. Zeigen Sie, dass das Doléans-Maß des gestoppten Martingals M^τ gegeben ist durch

$$\mu_{M^\tau}(A) = \int_A 1_{(0,\tau]} d\mu_M = \mu_M(A \cap (0,\tau])$$

für alle $A \in \mathcal{P}$.

Abgabe: Mi. 25.11.2015 bis spätestens 12.00 im Fach 145