Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2015/16

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 04** **10.11.2015**

Auf diesem Aufgabenblatt wird immer von einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum ausgegangen, der die usual conditions erfüllt.

Aufgabe 1: 4 Punkte

Zeigen Sie, dass die σ-Algebra der previsiblen Mengen die kleinste σ-Algebra ist, bezüglich der alle linksseitig stetigen, adaptierten Prozesse messbar sind.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Zeigen Sie, dass die Menge der stochastischen Intervalle vereinigt mit den Rechtecken der Form $\{0\} \times F_0$, wobei $F_0 \in \mathfrak{F}_0$, ein Erzeugendensystem ist für die σ-Algebra der previsiblen Mengen. Dabei ist ein durch Stoppzeiten σ, τ gegebenes stochastisches Intervall definiert durch

$$(\sigma, \tau] = \{(t, \omega) : \sigma(\omega) < t \leq \tau(\omega)\}.$$

Aufgabe 3: 4 Punkte

Zeigen Sie, dass jeder previsible Prozess progressiv messbar ist.

Hinweis: Eine Teilmenge A von $[0, \infty) \times \Omega$ heißt progressiv messbar, wenn deren Indikatorfunktion progressiv messbar ist. Die Menge der progressiv messbaren Mengen bilden eine σ-Algebra. Wie ist der Zusammenhang zur σ-Algebra der previsiblen Mengen.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Gegeben seien ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und Stoppzeiten σ, τ mit $\sigma \leq \tau$, die nur endlich viele Werte annehmen können. Zeigen Sie, dass das stochastische Intervall $(\sigma, \tau]$ eine endliche Vereinigung von previsiblen Rechtecken ist.

Abgabe: Mi. 18.11.2015 bis spätestens 12.00 im Fach 145