Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2015/16

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 03** **03.11.2015**

Aufgabe 1: Anwendung Optional Sampling 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$. Betrachte für $a, b > 0$ die Stoppzeit

$$\tau_{ab} = \inf\{t \geq 0 : W_t = -a \text{ oder } \; W_t = b\}.$$

Zeigen Sie

$$\mathbb{E}\,\tau_{ab} = ab.$$

Aufgabe 2: Anwendung Optional Sampling 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$.

1. Zeigen Sie, dass durch $M(t) = W(t)^4 - 6tW(t)^2 + 3t^2$ für alle $t \geq 0$ ein Martingal definiert wird.
2. Zeigen Sie, dass für die Stoppzeit

   $$\tau = \inf\{t \geq 0 : W_t = -b \text{ oder } \; W_t = b\}$$

   die Identität

   $$\operatorname{Var}\tau = \frac{3}{4}b^4$$

   gilt.

Aufgabe 3: Das Ruinproblem beim Wiener-Prozess mit Drift 4 Punkte

Zu einem Wiener-Prozess W und einer Drift $c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$ kann der Wiener-Prozess mit Drift definiert werden durch $X_t = W_t + ct$ für alle $t \geq 0$. Berechnen Sie für $a, b > 0$ die Wahrscheinlichkeit, dass X die Schwelle $-a$ vor b erreicht. Dies ist also $\mathbb{P}(\tau_{-a} < \tau_b)$, wobei

$$\tau_x = \inf\{t \geq 0 : X_t = x\}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet.

Hinweis: Sie können eine Argumentation über Optional Sampling durchführen. Was für Martingale kennen Sie?

Berechnen Sie weiter $\mathbb{E}\tau$ für $\tau = \tau_{-a} \wedge \tau_b$.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Seien X ein rechtsseitig stetiges Martingal und τ eine Stoppzeit bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$. Es gelte $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1, \mathbb{E}|X_\tau| < \infty, \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}X_t 1_{\{\tau > t\}} = 0$.

Zeigen Sie, dass dann das durch τ gestoppte Martingal X^τ gleichgradig integrierbar ist und somit

$$\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$$

gilt.

Abgabe: Mi. 11.11.2015 bis spätestens 12.00 im Fach 145