**Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis**

**Wintersemester 2015/16**

**PD Dr. V. Paulsen** **Blatt 02** **28.10.2015**

**Aufgabe 1:** Optional Sampling Theorem für Submartingale 4 Punkte

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein cadlag Submartingal bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$. Zeigen Sie:

1. Ist $\tau$ eine Stoppzeit mit $\tau \leq T$ für ein $T > 0$, so gilt $X_\tau \leq \mathbb{E}(X_T|\mathfrak{F}_\tau)$. Insbesondere folgt damit $\mathbb{E}X_\tau \leq \mathbb{E}X_T$.
2. Ist $N$ ein gleichgradig integrierbares Submartingal, so existiert eine integrierbare $\mathfrak{F}_\infty$ messbare Zufallsvariable $N_\infty$ mit $N_t \leq \mathbb{E}(N_\infty|\mathfrak{F}_t)$ $\mathbb{P}$-fast sicher für alle $t \geq 0$. Weiter gilt $N_\tau \leq \mathbb{E}(N_\infty|\mathfrak{F}_\tau)$ für jede Stoppzeit $\tau$ und damit insbesondere $\mathbb{E}N_\tau \leq \mathbb{E}N_\infty$.

**Aufgabe 2:** 4 Punkte

1. Seine $\sigma, \tau$ Stoppzeiten bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$. Zeigen Sie
$$\mathfrak{F}_{\tau\wedge\sigma} = \mathfrak{F}_\tau \cap \mathfrak{F}_\sigma.$$
2. Sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Stoppzeiten. Zeigen Sie, dass das
$$\sup_n \tau_n$$
eine $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ Stoppzeit ist und dass das
$$\inf_n \tau_n$$
eine $(\mathfrak{F}_{t+})_{t\geq 0}$ Stoppzeit ist.
3. Zeigen Sie die folgende Aussage für eine Stoppzeit $\tau$:

   Eine Zufallsvariable $Y$ ist $\mathfrak{F}_\tau$ messbar genau dann, wenn $Y1_{\{\tau\leq t\}}$ messbar ist bezüglich $\mathfrak{F}_t$ für alle $t \geq 0$.

**Aufgabe 3:** Doobsche Maximalidentität 4 Punkte

Sei $(M_t)_{t\geq 0}$ ein $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ Martingal mit stetigen Pfaden , das $M_t \geq 0$ für alle $t \geq 0$ und $\lim_{t\to\infty} M_t = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher erfüllt. Zeigen Sie, dass dann für alle $a > 0$ gilt

$$\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} M_t \geq a|\mathfrak{F}_0) = 1_{\{M_0\geq a\}} + \frac{M_0}{a} 1_{\{M_0<a\}}.$$

Zeigen Sie weiter

1. $\mathbb{P}(\sup_{t\geq T} M_t < a|\mathfrak{F}_T) = (1 - \frac{M_T}{a})^+$ für alle $T \geq 0$ ,
2. $\mathbb{E}(K - M_T)^+ = K\mathbb{P}(\lambda_K < T)$

Hierbei ist die letzte Besuchszeit bei $K > 0$ definiert durch

$$\lambda_K = \sup\{t \geq 0 : M_t = K\}, \sup \emptyset = 0.$$

**Aufgabe 4:** 4 Punkte

Sei $W$ ein Wiener-Prozess bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ . Definiere für $\sigma > 0$ den Prozess $S$ durch $S_t = \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$ für alle $t \geq 0$. Berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabe 3 für $K > 0$ die Verteilungsfunktion der letzten Besuchszeit in $K$ durch $S$. Diese ist durch

$$\lambda_K = \sup\{t \geq 0 : S_t = K\}, \sup \emptyset = 0.$$

gegeben.

**Abgabe:** Mi. 04.11.2015 bis spätestens 11.00 im Fach 145