Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2014/15

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 7** **25.11.2014**

Aufgabe 1: Ruinwahrscheinlichkeit beim Roulette 8 Punkte

Sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, n \in \mathbb{N}_0$ eine Irrfahrt in $\mathbb{Z}$, die aus dem Nullpunkt startet und

$$\mathbb{P}(X_1 = K) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1)$$

erfüllt für ein $K \in \mathbb{N}$. Für jedes $b \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Überlebenswahrscheinlichkeit $U(b)$ durch

$$U(b) = \mathbb{P}(S_n \leq b \text{ für alle } \ n \in \mathbb{N}_0) = \mathbb{P}(M \leq b),$$

wobei $M = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} S_n$ gesetzt wird.

Zeigen Sie

1. Für alle $b \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$U(b) = (1-p)U(b+1) + pU(b-K)1_{[K,\infty)}(b).$$

2. Setzt man $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)z^k$ für alle $0 < z < 1$, so gilt

$$g(z) = \frac{1-p}{z}(g(z) - U(0)) + pz^K g(z)$$

und damit

$$g(z) = (1-p)U(0)(1-p-z+pz^{K+1})^{-1}$$

für all $0 < z < 1$.

3. Ist

$$\mathbb{E}X_1 = Kp - (1-p) = (K+1)p - 1 < 0,$$

so ist

$$U(0) = 1 - \frac{p}{1-p}K < 1$$

und für

$$a_k = \mathbb{P}(M = k) = U(k) - U(k-1), a_0 = U(0)$$

gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = U(0)(1 - \frac{p}{1-p}\sum_{i=1}^{K} z^i)^{-1}$$

4. Wie können Sie dies benutzen, um die Ruinwahrscheinlichkeit der Bank beim Roulette zu berechnen, wenn ein Spieler nacheinander immer einen Euro auf die Zahl 20 setzt.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Wir betrachten ein Finanzmarktmodell bestehend aus zwei Aktien über N Perioden. Beide Aktien haben den gleichen Anfangspreis. Ausgehend von einem Anfangskapital $x > 0$ investieren Sie am Anfang in Aktie 1 und wechseln zu Aktie 2 zu dem Zeitpunkt, an dem sie billiger ist als die erste Aktie. Formulieren Sie dies als Handelsstrategie. Ist diese selbstfinanzierend? Wie entwickelt sich der Vermögensprozeß dieser Handelsstrategie?

Aufgabe 3: Multiplikative Doob-Meyer Zerlegung 4 Punkte

Sei $(X(n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ ein stochastischer Prozeß mit Werten in den positiven reellen Zahlen, der adaptiert ist bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $\mathbb{E}X_n < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt. Zeigen Sie, dass es genau eine Zerlegung der Form

$$X = Y \cdot M \cdot \Lambda$$

gibt mit $\mathfrak{F}_0$-meßbarem Y, Martingal M und vorhersehbarem Λ, die beide aus der 1 starten.

Abgabe: bis spätestens Dienstag den 02.12.2014 um 11.00 Uhr in Fach 143 (Torres) / 144 (Borrink)