Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2014/15

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 4** **04.11.2014**

Aufgabe 1: Deckungskapital 4 Punkte

Gegeben sei eine faire Personenversicherung $\Gamma = (t, s, b, T)$ und ein konstanter periodischer Diskontfaktor $v \in (0, 1)$.

- Überlegen Sie sich eine Rekursionsformel für das Deckungskapital.
- Wie muss bei einer reinen Todesfallversicherung das Beitragsspektrum b gewählt werden, so dass kein Deckungskapital entsteht?

Aufgabe 2: 4 Punkte

Die zufällige Lebensdauer eines Neugeborenen sei eine $(0, \infty)-$ wertige Zufallsvariable T mit Dichte f. Dies bedeutet, dass die Verteilungsfunktion F gegeben ist durch

$$F(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = \int_0^t f(s)ds$$

für alle $t > 0$. Die zu T gehörende Sterbeintensität μ ist definiert durch $\mu(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$ für alle $t > 0$ mit $\bar{F}(t) = \mathbb{P}(T > t) > 0$. Zeigen Sie

1. Die Sterbeintensität μ erfüllt

$$\mu(t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(T \leq t + h | T > t)$$

   für alle $t \geq 0$

2. $\bar{F}(t) = \exp(-\int_0^t \mu(s)ds)$ für alle $t \geq 0$.

3. Sie T_x die Restlebenszeit eines x-jährigen. Bestimmen Sie unter der Stationaritätsannahme die Verteilung und Sterbeintensität eines x-jährigen.

4. Bestimmen Sie unter der Stationaritätsannahme die Sterbeintensität eines x-jährigen, wenn die Lebensdauer eines Neugeborenen eine Gleichverteilung auf dem Intervall $(0, \omega)$ ist, wobei $\omega > 0$ die maximale Lebenszeit bezeichnet. Dies ist das Sterbegesetz von de Moivre

5. Beim Gompertzschen Sterbegesetz nimmt man an, dass die Sterbeintensität eines Neugeborenen die Form $\mu(t) = a \exp(bt)$ für alle $t > 0$ mit Parametern $a, b > 0$ erfüllt. Bestimmen die Verteilung von T_x unter der Stationaritätsannahme und berechnen Sie die mittlere Restlebenszeit $\mathbb{E}T_x$

Aufgabe 3: Altersrente 4 Punkte

Eine x-jährige Person schließt eine aufgeschobene Rentenversicherung ab, die nach einer Aufschubzeit von n Jahren eine lebenslange jährliche Rente der Höhe 12000 auszahlt. Finanziert wird diese Rentenversicherung durch eine konstante Prämieneinzahlung während der Aufschubzeit. Benutzen Sie die beigelegte Sterbetafel, um den Verlauf des Deckungskapitals für eine 30-jährige männliche Person bei einer Aufschubzeit von 35 Jahren zu berechnen. Benutzen Sie hierzu einen Rechnungszinssatz von $1,75\%$. Sinnvoll ist es, die in Aufgabe 1 entwickelte Rekursionsformel zu benutzen.

Aufgabe 4: Altersrente mit Todesfallschutz 4 Punkte

Eine bis zum Erreichen der Altersgrenze 65 beitragspflichtige Rentenversicherung, deren Renten der Höhe R ab dem Alter 65 lebenslänglich vorschussig zu zahlen sind, soll abgeschlossen werden. Als Leistung bei Tod vor Beginn der Altersrente wird am Ende des Todesjahres einmalig der Betrag S fällig.

1. Ermitteln Sie den Nettobarwert der Versicherung für einen 30 jährigen Mann mit $S = 100000$ und $R = 12000$.
2. Bestimmen Sie die Nettojahresprämie P
3. Bestimmen Sie den Nettodeckungskapitalverlauf.
4. Die Versicherung wird nach 20 Jahren Beitragsdauer beitragsfrei gestellt. Welche verminderte Altersrente kann dann jährlich vorschüssig nach der Aufschubzeit ausgezahlt werden.

Benutzen Sie für Ihre Rechnungen die beigefügte Sterbetafel.

Abgabe: bis spätestens Dienstag den 11.11.2014 um 11.00 Uhr in Fach 143 (Torres) / 144 (Borrink)