Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2014/15

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 11** **06.01.2015**

Aufgabe 1: Mehrperioden Modell für zwei Aktien 4 Punkte

Wir betrachten das folgende entsprechend Blatt 8 Aufgabe 1 definierte Finanzmarktmodell, in dem zu einem Random Walk $Z(n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n = 0, 1, \cdots, N$ mit

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0).$$

Aktienpreisprozesse S_1, S_2 definiert werden können durch

$$S_j(n) = S_j(0) u_j^{Z(n)} d_j^{n-Z(n)}$$

für alle $n = 0, \cdots, N$, $j = 1, 2$. Hierbei sind $0 < d_1 < u_1, 0 < d_2 < u_2$ die möglichen Sprunghöhen und $S_1(0), S_2(0)$ die Anfangskurse. Wir setzen $S_1(0) = S_2(0) = 1$ und nehmen Arbitragefreiheit an.

1. Ist das Modell vollständig.
2. Bewerten Sie eine Nullkouponanleihe, die nach N Perioden eine Auszahlung von 1 liefert.
3. Inwiefern können Sie dieses Modell auch als CRR-Modell auffassen.

Aufgabe 2: Zwei Aktien und ein Geldmarktkonto 6 Punkte

Gegeben seien iid Zufallsvariablen $X_1, \cdots, X_N$ jeweils mit Werten in $\{1, 2, 3\}$ Definiere die Prozesse Z_1, Z_2, Z_3 durch

$$Z_j(n) = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_n = j\}}$$

für alle $n = 0, 1, \cdots N$ und $j = 1, 2, 3$. Zu Sprunghöhen u, d_1, d_2 und Anfangskursen $S_1(0), S_2(0)$definiere die Aktienpreisprozesse S_1, S_2 durch

$$S_1(n) = S_1(0) u^{Z_1(n)+Z_3(n)} d_1^{Z_2(n)} \quad , \quad S_2(n) = S_2(0) u^{Z_1(n)} d_2^{Z_2(n)+Z_3(n)}$$

für alle $n = 0, \cdots, N$

Weiter sei ein Bankkonto in diesem Markt mit periodischer Zinsrate $\rho > -1$, was also einer Preisentwicklung der Form $\beta(n) = (1 + \rho)^n, n = 0, \cdots, N$ entspricht.

Wir nehmen $S_1(0) = 1 = S_2(0)$ sowie $d_1 < d_2 < 1 + \rho < u$ an.

1. Ist das Modell vollständig?

2. Bestimmen Sie einen Algorithmus, der für einen Claim der Form $C = h(S_1(N), S_2(N))$ einen Hedge ausrechnet.

3. Wenden Sie diesen Algorithmus an, um für eine Exchange Option den Anfangspreis zu bestimmen. Diese ist gegeben durch die Auszahlung $C = (S_2(N) - S_1(N))^+$. Für die Berechnung nehmen wir weiter an $d_1 = 3/4, d_2 = 4/5, \rho = 0, u = 5/4$

Aufgabe 3: 4 Punkte

Zeigen Sie, dass in einem CRR Modell über 2 Perioden jeder Claim hedgebar ist.

Aufgabe 4: 4 Punkte

In einem Trinomialmodell über zwei Perioden mit Zinsrate $\rho > -1$ für die risikofreie Anlage, in der eine Aktie mit Anfangspreis $S(0)$ die möglichen Endzustände $dS(0), mS(0), uS(0)$ annehmen kann, betrachten wir den Fall

$$S(0) = 5, \rho = \frac{1}{6}, d = \frac{2}{3}, m = 1, u = \frac{4}{3}.$$

Berechnen Sie den upper und lower hegding Preis für einen Call auf die Aktie mit Basis $K = \frac{8}{9}S(0)$.

Abgabe: bis spätestens Die 13.01.2015 11.00 Uhr im Fach Nr. 143 (Torres) bzw. 144 (Borrink)