Übungen

Abgabetermin: Freitag, 10.01.2014, 10 Uhr

THEMEN: σ-Algebren, Dichten, Zentraler Grenzwertsatz, Schätzer

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Für die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gelte $V(X_n) \leq C < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $Kov(X_i, X_j) = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $|i - j| \geq 2$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k))}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

$X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen, die gleichverteilt auf $[0, \alpha]$ sind, $\alpha > 0$, und es sei $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Berechnen Sie die Dichte und den Erwartungswert von M_n.

b) Sei $Y_n := n(\alpha - M_n)$. Zeigen Sie: Die Verteilungsfunktion von Y_n konvergiert punktweise gegen die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung mit Parameter $1/\alpha$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(i) Es sei N eine Menge und $M \subseteq \mathcal{P}(N)$. Zeigen Sie, dass

$$\sigma(M) := \bigcap_{\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(N)\ ,\ \mathcal{A}\ \sigma-\text{Algebra über } N \text{ mit } M\subseteq\mathcal{A}} \mathcal{A}$$

die kleinste σ-Algebra ist, die M enthält. $\sigma(M)$ heißt die von M erzeugte σ-Algebra.

(ii) Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Zeigen Sie:

(a) Wenn $\mathcal{A}$ die Mengen $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 4\}$ und $\{3, 5\}$ enthält, dann enthält $\mathcal{A}$ auch jede einelementige Teilmenge von Ω und es gilt $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

(b) Die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}$, welche die Mengen $\{2, 4\}$ und $\{3, 5\}$ enthält, besteht aus acht Elementen und enthält keine einelementige Teilmenge von Ω.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $\theta \in \Theta := \mathbb{N}$ und wir betrachten eine Urne, in der sich θ Kugeln befinden, die mit den Zahlen 1 bis θ beschriftet sind. Es werden n Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei X_i die Nummer der i-ten gezogenen Kugel.

(i) Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}$ für θ. Ist dieser der einzige Maximum-Likelihood-Schätzer?

(ii) Prüfen Sie, ob $\hat{\theta}$ erwartungstreu ist.

(iii) Prüfen Sie, ob $\hat{\theta}$ konsistent ist.