Übungen
Abgabetermin: Freitag, 20.12.2013, 10 Uhr
THEMEN: Dichten, Normalverteilung, ML-Schätzer, Faltung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

X und Y seien zwei unabhängige, stetige Zufallsvariablen mit Dichten f und g. Dann ist die Dichte von $X + Y$ gegeben durch die Faltung von f und g

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy.$$

X und Y seien unabhängig und Gamma-verteilt mit Parametern α und β_1 bzw. α und β_2, d.h. die Dichte von X ist gegeben durch

$$f_X(x) = \frac{\alpha^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1)} x^{\beta_1-1} e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

und die Dichte von Y ist gegeben durch

$$f_Y(x) = \frac{\alpha^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2)} x^{\beta_2-1} e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Berechnen Sie die Dichte von $X + Y$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch $Poi(\theta)$-verteilt mit unbekanntem Parameter $\theta \in \Theta = (0, \infty)$. Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ für θ.
Ist $\hat{\theta}$ erwartungstreu?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \lambda \cdot k \cdot (\lambda x)^{k-1} e^{(-\lambda x)^k} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

mit $\lambda > 0$, $k > 0$.

(i) Zeigen Sie, dass f eine Dichte auf $\mathbb{R}$ ist.

(ii) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von f.

(iii) Bestimmen Sie den Erwartungswert (sofern dieser existiert) von X, wenn X gemäß der Dichte f verteilt ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

X sei eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$-verteilte Zufallsgröße. Zeigen Sie:

$$E((X-\mu)^k) = \begin{cases} \sigma^k \prod_{i=1}^{\frac{k}{2}}(2i-1) & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$