Übungen
Abgabetermin: Freitag, 13.12.2013, 10 Uhr
THEMEN: Große Abweichungen, σ-Algebren

Aufgabe 1 (4 Punkte)

$X_1, X_2 \dots$ seien u.i. Ber(p)-verteilt und $\overline{S_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Die relative Entropie von a bezüglich p sei für $a \in (0,1)$ gegeben durch

$$H(a|p) = a \log\left(\frac{a}{p}\right) + (1-a)\log\left(\frac{1-a}{1-p}\right).$$

Zeigen Sie, dass

$$P(\overline{S_n} \geq a) \leq \exp(-n \cdot H(a|p))$$

für $a \in (p,1)$ und

$$P(\overline{S_n} \leq a) \leq \exp(-n \cdot H(a|p))$$

für $a \in (0,p)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(i) Ω sei überabzählbar. Zeigen Sie:

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq \Omega : A \text{ ist (höchstens) abzählbar oder } A^c \text{ ist (höchstens) abzählbar}\}$$

ist eine σ-Algebra über Ω.

(ii) $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable (d.h. messbar bzgl. $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$). Zeigen Sie, dass

$$X^{-1}(\mathcal{B}) = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$$

eine σ-Algebra über Ω ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

$X = (X_1, \ldots, X_r)$ sei multinomialverteilt mit Parametern $n, \rho = (\rho_1, \ldots, \rho_r)$, $0 < \rho_i < 1$ für $1 \leq i \leq r$, $\sum_{i=1}^{r} \rho_i = 1$, d.h.

$$P((X_1, \ldots, X_r) = (k_1, \ldots, k_r)) = \begin{cases} \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} \rho_1^{k_1} \ldots \rho_r^{k_r}, & \text{falls } k_1, \ldots, k_r \in \{0, \ldots, n\} \\ & \text{und } \sum_{i=1}^{r} k_i = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Weiter sei $\mathcal{M}(A)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $A = \{1, \ldots, r\}$, d.h. $\mathcal{M}(A) = \{(\nu_1, \ldots \nu_r) \in \mathbb{R}^r : \nu_i \geq 0, \sum_{i=1}^{r} \nu_i = 1\}$.
Für $\nu, \mu \in \mathcal{M}(A)$ mit $\mu_i > 0$ für $i \in \{1, \ldots, r\}$ sei die relative Entropie von ν bzgl. μ definiert durch

$$H(\nu|\mu) := \sum_{i=1}^{r} \nu_i \log \left(\frac{\nu_i}{\mu_i} \right).$$

Für $\varepsilon > 0$ sei

$$N_\varepsilon := \{\nu \in \mathcal{M}(A) : \|\nu - \rho\|_{\sup} \geq \varepsilon\}$$

und für $\omega \in \Omega$ sei

$$Y_n(\omega) = (Y_{n,1}(\omega), \ldots, Y_{n,r}(\omega)) = \left(\frac{X_1(\omega)}{n}, \ldots, \frac{X_r(\omega)}{n} \right).$$

Zeigen Sie:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P(Y_n \in N_\varepsilon) = \max_{\nu \in N_\varepsilon} -H(\nu|\rho) = - \inf_{\nu \in N_\varepsilon} H(\nu|\rho).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Nach einem anstrengenden Tag auf dem Weihnachtsmarkt treffen sich alle Nikoläuse noch am Glühweinstand. Dort trinken 50% Glühwein, 20% Kinderpunsch, 20% Kakao mit Amaretto und 10% Grog - jeder sechs oder sieben Tassen. Anschließend ziehen sie weiter. Von den Kinderpunschtrinkern landen 80% zu Hause und 20% am Mathematischen Institut, die Hälfte der Glühweintrinker geht anschließend nach Hause, 30% trinken noch einen Glühwein in der nächsten Kneipe und 20% fühlen sich nun stark genug für den Stochastikzettel - sie gehen zum Mathematischen Institut. Von den Amarettotrinkern schaffen es noch 30% nach Hause, 60% gehen in die Kneipe und 10% landen in der Mathematik. Von den Grogtrinkern zieht es niemanden nach Hause. Je zur Hälfte gehen sie in die nächste Kneipe oder ins Mathematische Institut. Kurz nach Mitternacht findet der Hausmeister einen Nikolaus vor der Tür in der Einsteinstraße. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er Grog getrunken?