Übungen

Abgabetermin: Freitag, 6.12.2013, 10 Uhr

THEMEN: Totaler Variationsabstand, Poisson'scher Grenzwertsatz

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gehen Sie davon aus, dass jedes Flugzeug mit gleicher Wahrscheinlichkeit unabhängig von allen anderen Flugzeugen abstürzt und dass die erwartete Anzahl der abgestürzten Flugzeuge pro Jahr zwei beträgt. Approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

(i) im nächsten Jahr mehr als drei Flugzeuge abstürzen,

(ii) im nächsten Jahr kein Flugzeug abstürzt,

(iii) es in den nächsten zehn Jahren genau fünf Flugzeugabstürze geben wird.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir nehmen an, dass bei der nächsten Lottoausspielung „6 aus 49“ 70 Millionen unabhängige, rein zufällig generierte Zahlenreihen abgegeben werden.

(i) Wie wäre die Anzahl der Reihen mit sechs Richtigen dann approximativ verteilt?

(ii) Wie groß wäre approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens drei Sechser im Lotto auftreten?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

ν und μ seien zwei Maße auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum Ω. Der totale Variationsabstand der Maße ν und μ sei definiert durch

$$d_{TV}(\nu, \mu) := \sum_{\omega \in \Omega} |\nu(\omega) - \mu(\omega)|$$

Zeigen Sie:

$$d_{TV}(\nu, \mu) = 2 \max_{A \subseteq \Omega} |\nu(A) - \mu(A)|.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(i) Beweisen Sie folgenden

Satz 0.1. *Für je zwei unabhängige $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariablen X_1 und X_2 und deren erzeugende Funktionen φ_{X_1} und φ_{X_2} gilt*

$$\varphi_{X_1+X_2}(s) = \varphi_{X_1}(s)\varphi_{X_2}(s) \quad \textit{für alle } s \in (-1,1).$$

(ii) Es sei X_1 $B(n,p)$-verteilt. Bestimmen Sie φ_{X_1}.

(iii) Weiter sei X_2 $B(m,p)$-verteilt und unabhängig von X_1. Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1 + X_2$.

(iv) Beweisen Sie den Poissonschen Grenzwertsatz mit Hilfe erzeugender Funktionen. Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass $p_n \cdot n = \lambda$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sie dürfen dabei ohne Beweis den folgenden Satz benutzen:

Satz 0.2. *Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und X Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Aus*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(s) = \varphi_X(s) \quad \textit{für alle } s \in (-1,1)$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.