Übungen

Abgabetermin: Freitag, 22.11.2013, 10 Uhr

THEMEN: Stirling-Formel, Unabhängigkeit von Zufallsvariablen, Zentraler Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace

Aufgabe 1 (5 Punkte)

(i) Zeigen Sie mit Hilfe von Analysis 1, dass

$$\int_k^{k+1} \ln(x)dx = \frac{1}{2}(\ln(k) + \ln(k+1)) + \frac{1}{12\zeta_k^2},$$

$k \le \zeta_k \le k+1$.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe von (1):

$$\int_1^n \ln(x)dx = \sum_{k=1}^n \ln(k) - \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\zeta_k^2},$$

$k \le \zeta_k \le k+1$.

(iii) Zeigen Sie mit Hilfe von (2), dass

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} c_n,$$

wobei $\lim_{n\to\infty} c_n$ existiert (und $c := \lim_{n\to\infty} c_n \in \mathbb{R}$).

(iv) Zeigen Sie mit Hilfe des Wallisschen Produkts

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2 \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2-1},$$

dass $c = \lim \frac{c_n^2}{c_{2n}} = \sqrt{2\pi}$.

(v) Folgern Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} = 1.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sie werfen drei faire Würfel. Die Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 geben jeweils die Augenzahl des ersten, zweiten bzw. dritten Würfels an. Des weiteren sei

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{falls die Augensumme der ersten beiden Würfel 7 ist} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

sowie

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{falls die Augensumme der letzten beiden Würfel gerade ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Stellen Sie das Experiment durch einen Wahrscheinlichkeitsraum dar und definieren Sie die Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3, Y und Z auf Ω.

(1) Sind X_1 und Y unabhängig?

(2) Sind Y und Z unabhängig?

(3) Berechnen Sie die Kovarianz von $X_2 - X_3$ und $X_2 + X_3$.
Sind $X_2 + X_3$ und $X_2 - X_3$ unabhängig?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Die Betreiber der „Schwarzen Sau“ planen ein Konzert. Aus Sicherheitsgründen dürfen sie nur 400 Personen einlassen.
Die Betreiber gehen davon aus, dass jede Person, die eine Karte gekauft hat, unabhängig von allen anderen Personen, die Karten gekauft haben, mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% nicht kommt und die Karte auch weder weiterverkauft noch verschenkt.
Die Betreiber wollen so viele Karten wie möglich absetzen und verkaufen daher mehr als 400 Karten. Wie viele Karten dürfen höchstens verkauft werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass zu dem Konzert mehr als 400 Personen kommen, höchstens 1% beträgt?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir verfügen über zwei Münzen, eine davon fair, die andere unfair. Die unfaire Münze zeigt mir Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ Kopf und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ Zahl.
Wir wählen zufällig eine der beiden Münzen aus, werfen die Münze drei mal und sie zeigt jedes Mal Kopf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze fair ist?