Übungen
Abgabetermin: Freitag, 15.11.2013, 10 Uhr
THEMEN: Modellierung, erzeugende Funktion, Permutationen

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Doppelkopf wird mit zwei Skatspielen gespielt, bei denen jeweils die 7,8 und 9 aussortiert wurden. Die restlichen 40 Karten werden zufällig an die vier Spieler verteilt.
Beschreiben Sie die Situation durch einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p), stellen Sie die folgenden Ereignisse als Teilmengen von Ω dar und geben Sie deren Wahrscheinlichkeiten an:

(1) Der erste Spieler hat mindestens einen „Fuchs“ (Karo-As) auf der Hand.

(2) Ein Spieler erhält beide Kreuz-Damen.

(3) Jeder Spieler könnte im ersten Stich Kreuz-Fehl (d.h. Kreuz-König, Kreuz-Zehn oder Kreuz-As) bedienen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

$(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ sei eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{N}_0$ (d.h. $(\mathbb{N}_0, p)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $p(k) = p_k$). Die erzeugende Funktion der Verteilung $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist definiert durch

$$\varphi(s) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} p_k s^k,\ |s| < 1.$$

Ist X eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable, so bezeichnen wir mit

$$\varphi_X(s) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} P(X = k)s^k,\ |s| < 1,$$

die erzeugende Funktion von X.

(1) Zeigen Sie: φ ist auf $(-1, 1)$ unendlich oft differenzierbar und es gilt

$$p_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}.$$

Insbesondere ist durch die erzeugende Funktion die Verteilung $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eindeutig festgelegt.

(2) Bestimmen Sie die Verteilung auf $\mathbb{N}_0$, deren erzeugende Funktion die Form

$$\varphi(s) = e^{-\lambda(1-s)}$$

hat.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei X eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable mit erzeugender Funktion φ_X. Zeigen Sie:

(i) $E(X)$ existiert genau dann, wenn $\varphi_X'(1-) := \lim\limits_{s \nearrow 1} \varphi_X'(s)$ existiert. In diesem Fall gilt

$$E(X) = \varphi_X'(1-).$$

(ii) $V(X)$ existiert genau dann, wenn $\varphi_X''(1-) := \lim\limits_{s \nearrow 1} \varphi_X''(s)$ existiert. In diesem Fall gilt

$$V(X) = \varphi_X''(1-) - E(X)^2 + E(X).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Menge $\Omega = \mathcal{S}_n$ der Permutationen, d.h. der bijektiven Selbstabbildungen, auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$ mit der Laplace-Verteilung auf $\mathcal{S}_n$.
Für eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ heiß ein Element $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\sigma(i) = i$ Fixpunkt der Permutation.

(1) Bestimmen Sie für $1 \leq k \leq n$ die Wahrscheinlichkeit, dass $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, $i_j \neq i_l$ für $j \neq l$, Fixpunkte einer zufällig ausgewählten Permutation sind.

(2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Permutation keinen Fixpunkt hat.

(3) Bestimmen Sie mit Hilfe von (1) und (2) die Wahrscheinlichkeit, dass eine Permutation genau k Fixpunkte hat.