Übungen
Abgabetermin: Freitag, 19.01.2014, 10 Uhr
THEMEN:

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Die Zufallsvariablen $X_1 \ldots, X_n$ seien uiv Exponential-verteilt mit Parameter $\theta \in \Theta = (0, \infty)$.

Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}$ für θ.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

(i) Die Gammafunktion ist definiert durch

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx.$$

Zeigen Sie:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

(ii) Die Dichte der χ_n^2-Verteilung ist gegeben durch

$$g_n(x) = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}},\ x > 0.$$

X sei gemäß der Dichte g_n verteilt. Zeigen Sie:

$E(X) = n$ und $V(X) = 2n$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Dr. Hummel behauptet, die Biersorten Bocks und Krumbacher mit verbundenen Augen am Geschmack unterscheiden zu können. Er würde dies zwar nicht immer schaffen, aber mit höherer Wahrscheinlichkeit treffen als jemand, der rät.
Um herauszufinden, ob Dr. Hummel Recht hat, führen Sie folgenden Test durch: Dr.

Hummel testet zehn Mal die beiden Sorten gegeneinander. Die einzelnen Versuche können als unabhängig angenommen werden. Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass Dr. Hummel die Biere bei einem gegebenen Versuch richtig erkennt.
Sie wollen im Folgenden die Hypothese H_0 testen, dass Dr. Hummel nur rät ($p = \frac{1}{2}$), gegen die Alternative H_1, dass er tatsächlich besser ist, als jemand, der rät ($p > \frac{1}{2}$).

(i) Konstruieren Sie einen nicht-randomisierten Neyman-Pearson-Test zum Niveau $\alpha = 6\%$, der den Fehler zweiter Art möglichst klein hält.

(ii) Dr. Hummel hat tatsächlich Recht und erkennt mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.8$ die Biersorte richtig. Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie seine Behauptung ablehnen, wenn Sie Ihre Schranke wie in (2) wählen?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir werfen eine Münze drei Mal. Die Münze zeigt bei jedem Wurf mit Wahrscheinlichkeit p Kopf. Wir wollen die Hypothese $p = \frac{1}{3}$ gegen die Alternative $p < \frac{1}{3}$ testen.

(i) Geben Sie einen nicht-randomisierten Neyman-Pearson-Test (d.h. einen Neyman-Pearson-Test, der nur Werte in $\{0, 1\}$ annimmmt) zum Niveau $\alpha = \frac{4}{27}$ an.

(ii) Geben Sie einen randomisierten Neyman-Pearson-Test zum Niveau α an.

(iii) Gibt es einen nicht-randomisierten Test zum Niveau α, der eine größere Güte hat als der Test in (a)?