Übungen

Abgabetermin: Donnerstag, 31.10.2013, 18 Uhr

THEMEN: Kombinatorik, Unabhängigkeit, Satz von Bayes

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(Ω, P) sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, B, C und D Ereignisse in Ω. Wie lauten die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise?

(1) Es tritt nur das Ereignis C ein.

(2) Es treten genau zwei der vier Ereignisse ein.

(3) Es treten mindestens drei der vier Ereignisse ein.

(4) Es tritt höchstens eins der vier Ereignisse ein.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beim „Meiern“ (auch bekannt als „Mäxchen“) würfelt man mit zwei Würfeln und bildet mit den beiden Augenzahlen die größtmögliche zweistellige Zahl. Die Zahl ist umso mehr wert, je höher sie ist. Dabei gibt es zwei Ausnahmen: jeder Pasch ist mehr wert als die „normalen“ Zahlen und die Kombination 2 und 1 (Meier bzw. Mäxchen), hat die höchste Wertigkeit. Bei einem Pasch geht die Wertigkeit nach der Augenzahl, d.h. ein Fünferpasch ist mehr wert als ein Dreierpasch usw.
Ziel ist es, den Wurf des Vorgängers zu überbieten. Dabei kann man, wenn der eigene Wurf dazu nicht ausreicht, entweder lügen, oder aber noch einmal würfeln und den Würfelbecher ungeöffnet weitergeben. (Ihr Nachfolger entscheidet dann, ob der Becher aufgedeckt wird. Ist Ihr Wurf nicht besser, haben Sie verloren.)

(1) Ihr Vorgänger hat eine 61 gewürfelt und sie konnten dies nicht überbieten. Sie sind außerdem ein miserabler Lügner und würfeln deshalb lieber noch einmal und geben den Becher ungeöffnet weiter. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben Sie tatsächlich etwas besseres gewürfelt als ihr Vorgänger?
Begründen Sie ihr Ergebnis, indem Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) für ihren Wurf nennen und das Ereignis „besseres Ergebnis als 61“ als Teilmenge von Ω angeben.

(2) Sie werfen insgesamt 15 mal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt während Ihres Spiels mindestens ein Meier vor?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \subseteq \Omega$.

(1) Zeigen Sie:
$\emptyset$ und A sowie Ω und A sind unabhängig.

(2) Es gelte $A \subseteq B$. Dann gilt: A und B sind unabhängig $\Leftrightarrow$ $P(B) = 1$ oder $P(A) = 0$.

(3) Es sei $0 < P(B) < 1$ und $A \cap B = \emptyset$. Dann folgt:

$$P(A^c|B) = P(A|B^c) \Leftrightarrow P(A) + P(B) = 1.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Bei einem Zufallsexperiment wird zunächst eine faire Münze geworfen. Zeigt die Münze Kopf, wirft man einen fairen Würfel, zeigt sie Zahl, wirft man einen unfairen Würfel, der mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine sechs würfelt (und mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{10}$ die restlichen Zahlen).
Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Münze Zahl zeigte, gegeben, dass mit dem Würfel eine sechs geworfen wurde. Geben Sie dabei auch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für das Zufallsexperiment an.