

## Übungen zur Finanzmathematik <sup>1</sup>

Abgabetermin: 10.12.2013 12.15 Uhr in Briefkasten 132  
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

### Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei ein filtrierter W-Raum  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$  gegeben. Wir betrachten die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t\}$  für eine Stoppzeit  $\tau$ . Zeigen Sie:

- (a) Ist  $\sigma \leq \tau$  eine weitere Stoppzeit, so ist  $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$
- (b) Ist  $Z$  Dichteprozess eines Maßes  $\mathbb{Q}$  bzgl.  $\mathbb{P}$ , so ist

$$\left. \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_\sigma} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Z_T \mid \mathcal{F}_\sigma) = Z_{T \wedge \sigma}$$

### Aufgabe 2 (Petersburger Paradoxon) (5 Punkte)

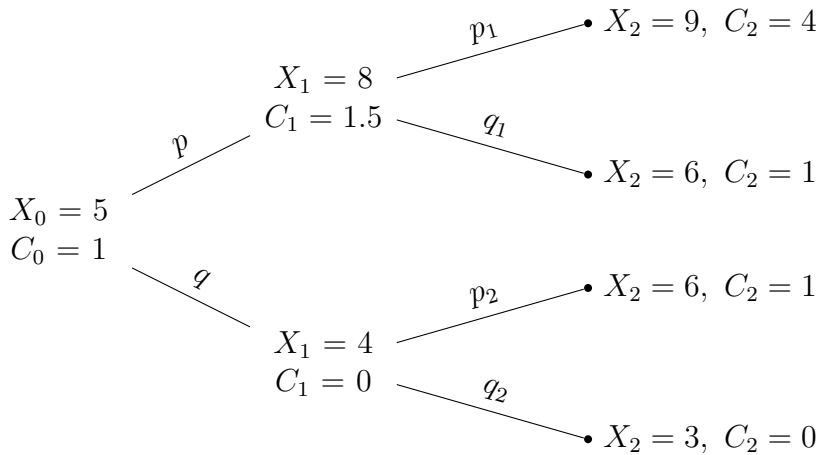
Sie spielen Roulette und setzen auf "rot", bis Sie einmal gewonnen haben, und nehmen dann ihren Gewinn mit. Dabei setzen Sie zuerst 1 Euro und verdoppeln jedesmal ihren Einsatz, wenn Sie verlieren.

- (a) Geben Sie ein geeignetes Finanzmarktmodell an und eine passende Handelsstrategie an, um diese Situation darzustellen
- (b) Wie groß ist der Gewinn beim Ausspielen dieser Strategie? Wie groß ist der erwartete Gewinn, wenn Sie stattdessen mit einer festen Budgetobergrenze von  $N$  Euro spielen und aufhören, wenn Sie das erste mal gewinnen oder ihnen das Geld ausgeht?

---

<sup>1</sup>Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:  
<http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1314/FiMa/>

**Aufgabe 3** (Snell-Envelope) Betrachten Sie das folgende Diagramm zur Darstellung eines Finanzmarktes:



Dabei sei  $X$  der abdiskontierte Aktienpreis und  $C$  eine amerikanische Option.

- (a) Berechnen Sie  $\max_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}(C_\tau)$  bzgl. des Maßes  $\mathbb{P}$ , welches jedem Szenario die gleiche Wahrscheinlichkeit beimisst (d.h.  $p = q = p_i = q_i = \frac{1}{2}$ ).
- (b) Zeigen Sie: In dem obigen Marktmodell existiert genau ein äquivalentes Martingalmaß  $\mathbb{Q}$ . Berechnen Sie den zugehörigen Snell-Envelope  $U$ .

**Aufgabe 4** (Optimales Stoppen) (5 Punkte)

Sie drehen ein Glücksrad mit Feldern von 1 bis 50. Nach Anhalten des Rades können Sie zwischen Auszahlung des angezeigten Betrages und nochmaligem Drehen des Glücksrades wählen. Die Anzahl der Versuche ist auf  $T$  begrenzt. Formulieren Sie dies als optimales Stoppproblem und geben Sie eine optimale Strategie an. Geben Sie diese explizit für  $T = 4$  an.

**Hinweis:** Leiten Sie dazu eine Rekursionsformel für  $\mathbb{E} U_s$  her und benutzen Sie  $\tau^{\text{opt}} = \min\{s | U_s = Z_s\}$ , wobei  $Z_s$  das Ergebnis des Glücksrades in der  $s$ -ten Runde sei. Gehen Sie bei der Berechnung des Snell-Envelopes  $U$  von einer Gleichverteilung aus.