**Übungen zur Finanzmathematik** [1]

Abgabetermin: 19.11.2013 12.15 Uhr in Briefkasten 132
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

**Aufgabe 1** (Formalisierung der Baumdarstellung) (5 Punkte)
Sei für $v = (\omega_1, ..., \omega_t) \in \mathbb{V}_t$ wie in der Vorlesung definiert $A_v := \{v\} \times \{d, u\}^{T-t} \in \mathcal{F}_t$. Zeigen Sie:

(a) $A_v$ ist eine $t$-atomare Menge

(b) $\{A_v : v \in \mathbb{T}_t\}$ ist eine Partition von $\Omega$.

(c) Ist $w$ ein Kind von $v \in \mathbb{T}_{t-1}$ so ist $\mathbb{Q}(A_w | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{1}_{A_v} \frac{\mathbb{Q}(A_w)}{\mathbb{Q}(A_v)}$.

**Aufgabe 2** (Chooser-Option im $T$-Perioden-Modell) (5 Punkte)
Gegeben sei ein arbitragefreies $T$-Perioden Finanzmarktmodell. Eine Chooser-Option ist eine Option, die dem Käufer das Recht gibt zum (festgelegten) Zeitpunkt $k < T$ nach Wahl entweder einen Call mit strike $K$, maturity $T$ oder einen Put mit gleichem strike und gleicher maturity zu erhalten. Seien $c_k$ bzw. $p_k$ die Preise von Call- bzw. Putoption zum Zeitpunkt $k \leq T$. Zeigen Sie, dass die Auszahlung dieses Claims durch $C = (S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{c_k \geq p_k\}} + (K - S_T)^+ \mathbb{1}_{\{c_k < p_k\}}$ beschrieben wird. Zeigen Sie ausserdem, dass der Preis der Chooseroption $p(C) = c(S_0, T, K) + p(S_0, k, K(1 + r)^{T-k})$ erfüllt wobei der erste Summand den Preis eines Calls mit Anfangsaktienkurs $S_0$, maturity $T$, strike $K$ bezeichne und der zweite Summand den Preis eines Puts mit Anfangsaktienkurs $S_0$, maturity $k$ und strike $K(1 + r)^{T-k}$ bezeichne.
**Hinweis**: Benutzen Sie die Put-Call-Parität.

**Aufgabe 3** (5 Punkte)
Wir betrachten die folgenden drei Finanzmärkte:

(a) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ mit $r = \frac{1}{9}$ und einer Aktie $S$ mit Preisen

$$S_0 = 5, S_1(\omega_1) = \frac{20}{3}, S_1(\omega_2) = \frac{49}{9}$$

(b) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit $r = \frac{1}{9}$ und einer Aktie $S$ mit Preisen

$$S_0 = 5, S_1(\omega_1) = \frac{20}{3}, S_1(\omega_2) = \frac{49}{9}, S_1(\omega_3) = \frac{10}{3}$$

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1314/FiMa/`

(c) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit $r = \frac{1}{9}$ und zwei Aktien $S^1, S^2$ mit Preisen

$$S_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}, S_1(\omega_1) = \begin{pmatrix} 20/3 \\ 40/3 \end{pmatrix}, S_1(\omega_2) = \begin{pmatrix} 20/3 \\ 80/9 \end{pmatrix}, S_1(\omega_3) = \begin{pmatrix} 40/9 \\ 80/9 \end{pmatrix}$$

Jedem dieser Modelle liege ein W-Maß $P$ zugrunde, welches $P(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ erfüllt. Geben Sie an, weche dieser Modelle arbitragefrei sind und geben Sie für eine Arbitragemöglickeit für alle Modelle an, die nicht arbitragefrei sind. Geben Sie ausserdem an, welche Modelle vollständig sind, und finden Sie für alle nicht vollständigen Modelle eine nicht-erreichbare Auszahlung $C$.

**Aufgabe 4** (5 Punkte)

Zeigen Sie die folgende elementare Version des Minkowskischen Trennungssatzes. Sei $\mathcal{C}$ eine nichtleere konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $0 \notin \bar{\mathcal{C}}$. Dann gibt es ein $\eta \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\forall\, x \in \mathcal{C} :\ \eta \cdot x \geq 0 \tag{0.1}$$

und

$$\exists\, x_0 \in \mathcal{C} :\ \eta \cdot x_0 > 0 \tag{0.2}$$