Übungen zur Finanzmathematik [1]

Abgabetermin: 12.11.2013 12.15 Uhr in Briefkasten 132
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (Der Raum L^∞) (5 Punkte)
Gegeben sei ein W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit einer Zufallsgröße $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, d.h. $\|X\|_\infty := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(|X| > \lambda) = 0\} < \infty$. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{P}(|X| > \|X\|_\infty) = 0$

(b) $|XY| \leq \|X\|_\infty |Y|$ $\mathbb{P}$-f.s. für alle $Y \in L_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Folgern Sie:

(c) $X, Y \in L^\infty \Rightarrow XY \in L^\infty$

(d) $X \in L^\infty, Y \in L^1 \Rightarrow XY \in L^1$

Aufgabe 2 (Martingal-Wiederholung) (5 Zusatzpunkte)
Zeigen Sie:

(a) Sei $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $(\mathcal{F}_t)_{t=1,\dots,N}$ Filtration auf $\mathcal{F}$. Dann ist der filtrierte Prozess $M_t := \mathbb{E}(X|\,\mathcal{F}_t)$ bzgl. $(\mathcal{F}_t)$ ein Martingal.

(b) Seien $(X_n)_{n\geq 1}$ stochastisch unabhängige Zufallsgrößen mit $\mathbb{E}\,X_i = 0$ für alle i. Dann ist $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ Martingal bzgl. der von dem Prozess X erzeugten Filtration. Ist überdies $\mathrm{var}(X_i) = \sigma_i^2 < \infty$, so ist auch $S_n^2 - \mathrm{var}(S_n)$ ein Martingal bzgl. dieser Filtration.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

(a) Zeichnen Sie die Auszahlungsfunktion in Abhängigkeit des Endwertes S_T einer Aktie der folgenden europäischen Optionen und erläutern Sie, warum man mit diesen handelt:
   (i) Call- und Putoption
   (ii) Bear Call Spread, d.h. es werden auf das selbe underlying S zum selben Ausübungszeitpunkt T ein Call zum Strike K_1 gekauft und ein Calls zum Strike $K_2 < K_1$ verkauft
   (iii) Straddle: Dabei wird eine Long-Position in eine Call-Option und eine Put-Option mit demselben Strike K eingegangen

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1314/FiMa/`

(b) Finden Sie einen Hedge für die Call-Option im 1-Perioden Binomialmodell

Aufgabe 4 (Wechsel des Numéraire) (5 Punkte)
Sei $\overline{S} = (S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ ein Finanzmarkt, so dass für alle $t \in \{0, \dots, T\}$, $S_t^d > 0, \mathbb{P}$-fast sicher. Statt die Preise auf den Preisprozess S^0 zu beziehen, kann man als Numéraire auch den Preisprozess S^d wählen. Es bezeichne $\mathcal{M}^0$ und $\mathcal{M}^d$ die äquivalenten Martingalmaße des Marktes $\overline{S}$ bezüglich des Numéraire S^0 bzw. S^d.

Sei $\mathbb{Q}^0 \in \mathcal{M}^0$. Zeigen Sie, dass das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}^d$ mit

$$\frac{d\,\mathbb{Q}^d}{d\,\mathbb{Q}^0} = \frac{X_T^d}{X_0^d}$$

in $\mathcal{M}^d$ liegt. Hierbei bezeichnet für $i \in \{0, \dots, d\}$, $(X_t^i)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ den bezüglich S^0 diskontierten Preisprozess. Die so definierte Transformation $\mathbb{Q}^0 \mapsto \mathbb{Q}^d$ ist eine Bijektion zwischen $\mathcal{M}^0$ und $\mathcal{M}^d$.

Hinweis: Verzichten Sie auf den Beweis der Integrierbarkeit aus der Definition eines Martingals.

Aufgabe 5 (5 Punkte)
Beweisen Sie Proposition 2.8, d.h. zeigen Sie: Für $W \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ existiert W-Maß $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ mit $\frac{d\,\mathbb{Q}}{d\,\mathbb{P}} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $W \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$.