Übungen zur Finanzmathematik [1]

Abgabetermin: 5.10.2013 12.15 Uhr in Briefkasten 132
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Zeigen Sie:

(a) $(\mathcal{K} - L^0_+) \cap L^0_+ = \{0\} \Leftrightarrow \mathcal{K} \cap L^0_+ = \{0\}$ wobei $\mathcal{K} = \{H \cdot Y : H \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})\}$.

(b) Die Menge $\mathcal{C} := (\mathcal{K} - L^0_+) \cap L^1$ ist konvex.

(c) $\mathcal{C}$ ist positiv homogen, d.h. für alle $W \in \mathcal{C}$ ist $\lambda W \in \mathcal{C}$ für Konstanten $\lambda > 0$.

(d) Die Menge $\mathcal{Z} := \{Z \in L^\infty : 0 \leq Z \leq 1, \mathbb{E}(ZW) \leq 0 \ \forall \ W \in \mathcal{C}\}$ ist abzählbar konvex.

Aufgabe 2 (Martingalmaße bei endlichem Wahrscheinlichkeitsraum) (5 Punkte)
Seien $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, so dass für alle $n \in \{1, \ldots, N\}$, $\mathbb{P}(\{\omega_n\}) > 0$. Betrachten Sie ein arbitragefreies Ein-Perioden-Martkmodell mit diskontiertem Preisprozess $X = (X^1, \ldots, X^d)$. Wir nehmen zusätzlich an, dass die d Vektoren $(X^i_1(\omega_k) - X^i_0(\omega_k))_{k=1,\ldots,N} \in \mathbb{R}^N$, $i = 1, ..., d$, linear unabhängig sind. Die Menge der äquivalenten Martingalmaße sei mit $\mathcal{M}$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass $d < N$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ einelementig ist, wenn $d = N - 1$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ nicht einelementig ist, wenn $d < N - 1$.

Aufgabe 3 (Diskreter Girsanov) (5 Punkte)
Seien $Z_1, ..., Z_T$ iid Zufallsgrößen mit Standardnormalverteilung auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und sei $\mathcal{F}_t = \sigma(Z_i, i \leq t)$, $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. Für gegebene Konstanten $X_0, \sigma_0 > 0, m_i \in \mathbb{R}$ definieren wir den diskontierten Preisprozess eines Finanzgutes durch

$$X_t := X_0 \prod_{i=1}^{t} \mathrm{e}^{\sigma_i Z_i + m_i}$$

Konstruieren Sie in diesem Finanzmarktmodell ein äquivalentes Martingalmaß, so dass die X_i unter diesem neuen Martingalmaß weiterhin Lognormalverteilt sind.

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1314/FiMa/

Aufgabe 4 (Marktmodell mit Insiderinformation) (5 Punkte)
Seien $Y_1, ..., Y_T$ integrierbare iid Zufallsgrößen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ so dass $\mathbb{E}(Y_k) = 0$ und die Y_k seien nicht $\mathbb{P}$ f.s. konstant und sei $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_i, i \leq t)$, $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. Sei

$$X_t := X_0 + \sum_{i=1}^{t} Y_k$$

Bzgl. $(\mathcal{F}_t)$ ist X Martingal. Zeigen Sie:

(a) Bzgl. der Filtration $\tilde{\mathcal{F}}_t := \sigma(\mathcal{F}_t \cup \sigma(X_T))$ ist X kein Martingal mehr.

(b) Der Prozess

$$\tilde{X}_t := X_t - \sum_{i=0}^{t-1} \frac{1}{T-i}(X_T - X_i)$$

ist bzgl. $\tilde{\mathcal{F}}_t$ ein Martingal.