Übungen zur Finanzmathematik [1]

Abgabetermin: 29.10.2013 12.15 Uhr in Briefkasten 132
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (Bayes) (5 Punkte)
Sei Z eine nichtnegative, integrierbare Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ so dass $d\,\mathbb{Q} = Z d\,\mathbb{P}$ bzgl. eines weiteren W-Maßes $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass für eine Teil-σ-Algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ und eine bzgl. $\mathbb{Q}$ integrierbare Zufallsvariable X gilt:

$$E_{\mathbb{Q}}(X|\,\mathcal{G}) = \frac{E_{\mathbb{P}}(XZ|\,\mathcal{G})}{E_{\mathbb{P}}(Z|\,\mathcal{G})} \tag{0.1}$$

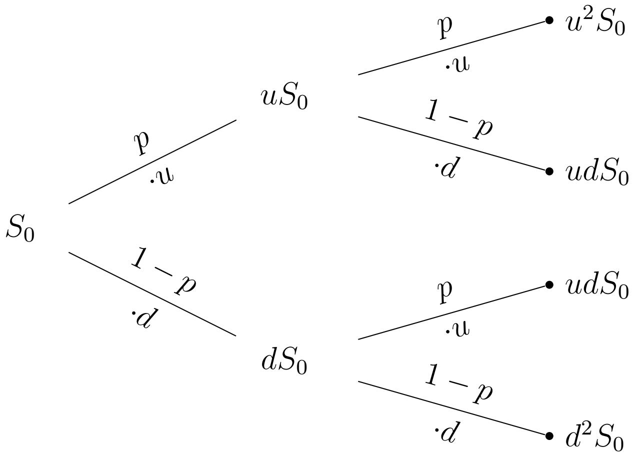
Aufgabe 2 (6 Punkte)
Beweisen Sie die Implikation *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* aus Doobs System Theorem aus der Vorlesung, d.h. zeigen Sie:
"Für jede selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{H} = (H^0, H)$ mit beschränktem H ist der Vermögensprozess $V(\overline{H})$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal"
impliziert
"Für jede selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{H} = (H^0, H)$ mit $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}((V_T(\overline{H})^-) < \infty$ ist $V(\overline{H})$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal."
Hinweis : Zeigen Sie:
(*) Für jedes t: $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(V_t^-(\overline{H})) < \infty$ **impliziert** $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(V_t(\overline{H})|\,\mathcal{F}_{t-1}) = V_{t-1}(\overline{H})$.
Um dies zu sehen, benutzen Sie Aussage *ii)* mit einer passend gewählten beschränkten Handelsstrategie. Dann ergibt sich aus (*) mittels iteriertem Bedingen und Ausnutzen der Jensen-Ungleichung auf die Funktion $f(x) = x^- = -x \wedge 0$ die geforderte Martingaleigenschaft.

Aufgabe 3 (Arbitrage im Binomialmodell) (9 Punkte)
Betrachten Sie das Binomialmodell aus Beispiel 1.3. Wir setzen dabei $Y_t := \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1$ für $t = 1, ..., T$.

(a) Zeigen Sie: (Y_t) ist eine iid Folge von Zufallsgrößen mit $\mathbb{P}(Y_t = u) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_t = d)$ und es ist $S_t = S_0 \prod_{i=1}^t (1 + Y_i)$

(b) Berechnen Sie für $S_0 = 100$ und $u = 2, d = 0.5, p = 0.66, T \geq 4$ die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(S_4 = 400)$ und $P(S_4 = 25)$. Illustrieren Sie Ihre Rechnung mithilfe eines Binomialbaumes, vgl. den Beispielbaum.

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1314/FiMa/`



Sei im Folgenden $T = 1$.

(c) Berechnen Sie explizit die Menge $\mathcal{M}$ der äquivalenten Martingalmaße.

(d) Zeigen Sie, dass das Binomialmodell für $d < r < u$ arbitragefrei ist.

(e) Konstruieren Sie je eine Arbitrage für $d \geq r$, bzw. $r \geq u$.

(f) Finden Sie im arbitragefreien Fall ein zugrundeliegendes Maß $\mathbb{P}$ und eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{H}$, so dass der Vermögensprozess $V(\overline{H})$ kein $\mathbb{P}$-Martingal ist.

(g) Sei $d < m < r$. Erweitern Sie das Modell, so dass Y_i zusätzlich den Wert m annehmen kann. Wie verändern sich Ihre Ergebnisse aus Teil (c) bis (e)?