

## Übungen zur Finanzmathematik <sup>1</sup>

Abgabetermin: 21.01.2014 12.15 Uhr in Briefkasten 132  
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

### Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei  $W$  Wiener-Prozess bzgl. einer Filtration  $\mathcal{F}$  und  $\sigma$  eine  $\mathbb{P}$ -fast sicher endliche Stoppzeit. Dann ist  $(W_{\sigma+t} - W_\sigma)_{t \geq 0}$  ein Wienerprozess bzgl. der Filtration  $(\mathcal{F}_{\sigma+t})_{t \geq 0}$ , der stochastisch unabhängig von  $\mathcal{F}_\sigma$  ist.

### Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei  $W$  ein Wienerprozess und seien  $\tau_0 := 0$ ,  $\tau_a := \inf\{t : W_t = a\}$ . Zeigen Sie, dass  $\tau_a$  für alle  $a$  fast sicher endlich ist und dass  $(\tau_s)_{s \geq 0}$  ein Prozess mit unabhängigen und identisch verteilten Zuwächsen ist.

**Hinweis:** Benutzen Sie für den Beweis der Endlichkeit das Reflektionsprinzip 6.22 und für den zweiten Teil die Aussage von Aufgabe 1.

### Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei  $W$  Wiener Prozess und  $\tau_{a,b} := \inf\{t \geq 0 | W_t = a + bt\}$ . Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von  $\tau := \tau_{a,b}$ . Benutzen Sie hierfür das Optional Sampling Theorem.

### Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben sei ein Black-Scholes-Modell und Konstanten  $c, K > 0$ .

- (a) Berechnen Sie den fairen Preis einer Option mit Auszahlung  $c \mathbb{1}_{\{S_T > K\}}$  in  $T$  (*Cash-or-Nothing-Option*)
- (b) Berechnen Sie den fairen Preis einer Option mit Auszahlung  $(S_t - c) \mathbb{1}_{\{S_T > K\}}$  (*Gap-Option*)

---

<sup>1</sup>Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:  
<http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1314/FiMa/>