Übungen zur Finanzmathematik [1]

Abgabetermin: 13.01.2014 12.15 Uhr in Briefkasten 132
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Sei W ein Wiener Prozess. Zeigen Sie:

(a) $(W_{t+s} - W_s)_{t\geq 0}$ ist ein Wiener Prozess.

(b) $(-W_t)_{t\geq 0}$ ist ein Wiener Prozess.

(c) $(cW_{\frac{t}{c^2}})_{t\geq 0}$ ist ein Wiener Prozess.

Aufgabe 2 (Starkes Gesetz der großen Zahlen) (5 Punkte)
Sei W Wiener Prozess. Zeigen Sie: $\frac{W_t}{t} \underset{t\to\infty}{\rightarrow} 0$ $\mathbb{P}$ fast sicher.
Hinweis: Benutzen Sie ohne Beweis folgende Aussage: Ist W Wiener-Prozess und $M_t := \sup_{s\leq t} W_s$, so gilt für $t > 0, y > 0, x \geq 0$:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(M_t \geq y, W_t < y - x) = \mathbb{P}(W_t > y + x)\\ &\mathbb{P}(M_t \geq y) = 2\,\mathbb{P}(W_t \geq y)\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Sei S eine geometrische Brownsche Bewegung (d.h. $S_t = S_0\,\mathrm{e}^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$ für einen Wienerprozess W). Zeigen Sie: Für $\alpha > 0$ ist S_t^α ein Martingal genau dann, wenn $\alpha = 1 - \frac{2\mu}{\sigma^2}$

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Benutzen Sie Aufgabe 2 und das Optional Sampling Theorem zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass eine geometrische Brownsche Bewegung mit Startpunkt 1 b vor a erreicht, wobei $a < 1 < b$ gilt. **Hinweis**: Sie können die folgende Version des Optional Sampling Theorems benutzen: ist X ein adaptiertes rechtsseitig stetiges Martingal und τ eine Stoppzeit mit $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1, \mathbb{E}(|X_\tau|) < \infty$ und $\int_{\{\tau > t\}} |X_t|\, d\,\mathbb{P} \underset{t\to\infty}{\rightarrow} 0$ so ist $\mathbb{E}\, X_\tau = X_0$.

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1314/FiMa/`