

## Übungen zur Finanzmathematik <sup>1</sup>

Abgabetermin: 22.10.2013 10 Uhr in Briefkasten 132  
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

### Aufgabe 1

(5 Punkte)

Sei  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  und  $\mathbb{P}$  ein W-Maß auf  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  mit  $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$  für  $i = 1, 2, 3$ . Wir betrachten das 1-Perioden Finanzmarktmodell, gegeben durch die Preise  $\bar{X}_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$  und  $\bar{X}_1(\omega_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{X}_1(\omega_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{X}_1(\omega_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ . Zeigen Sie, dass es in diesem Finanzmarktmodell eine Arbitragemöglichkeit gibt und geben Sie diese an.

### Aufgabe 2

(10 Punkte)

Seien  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$  ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichte  $Z$  bezüglich  $\mathbb{P}$ .

- Zeigen Sie, dass  $Z$   $\mathbb{Q}$ -fast sicher eindeutig und positiv ist.
- Zeigen Sie, dass genau dann  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{P}$  äquivalent sind, wenn  $Z$   $\mathbb{P}$ -fast sicher positiv ist. Dann gilt:

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = Z^{-1}.$$

- Sei  $\mathbb{Q}'$  ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß mit  $\mathbb{Q}' \ll \mathbb{Q}$ . Zeigen Sie, dass eine Kettenregel im folgenden Sinne gilt:

$$\frac{d\mathbb{Q}'}{d\mathbb{P}} = \frac{d\mathbb{Q}'}{d\mathbb{Q}} \cdot \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$$

- Seien  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$  eine Filtration auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  und  $Z = (Z_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$  mit  $Z > 0$   $\mathbb{P}$ -f.s. ein Dichteprozess von  $\mathbb{Q}$  bezüglich  $\mathbb{P}$ , d.h. es ist  $\left. \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t$ . Zeigen Sie, dass ein  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptierter stochastischer Prozess  $X = (X_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$  genau dann ein  $\mathbb{Q}$ -Martingal ist, wenn das Produkt  $(X_t Z_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$  ein  $\mathbb{P}$ -Martingal ist.

<sup>1</sup>Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:  
<http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1314/FiMa/>

**Aufgabe 3**

(5 Punkte)

Beweisen Sie Teil (i) des Lemmas 1.12 aus der Vorlesung, d.h. dass eine Handelsstrategie  $\bar{H} = (H^0, H)$  genau dann selbstfinanzierend ist, wenn für alle  $t = 1, \dots, T$ ,

$$V_t(\bar{H}) = V_0(\bar{H}) + \sum_{s=1}^t H_s \cdot (X_s - X_{s-1})$$