Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2012/13

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 08** **26.11.2012**

Aufgabe 3: Ornstein-Uhlenbeck Prozeß als zeittransformierte Brownsche Bewegung

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ definierte Brownsche Bewegung mit einer Startverteilung μ und Diffusionskonstante $\sigma^2 = 1$. Definiere für $\theta > 0$ die Funktion $v(t) = \frac{1}{2\theta}(1 - \exp(-2\theta t))$ und setze

$$Y_t = e^{-\theta t} X(e^{2\theta t} v(t))$$

für alle $t \geq 0$.

Wir zeigen, dass Y bezüglich der durch $\mathfrak{G}_t = \mathfrak{F}_{e^{2\theta t} v(t)}, t \geq 0$ definierten Filtration ein Markov-Prozeß ist mit Übergangskern $K_t(y, \cdot) = N(ye^{-\theta t}, v(t))$ für alle $y \in \mathbb{R}, t > 0$. Wegen der Markov-Eigenschaft der Brownschen Bewegung gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_{t+s} \in A | \mathfrak{G}_t) &= \mathbb{P}(e^{-\theta(s+t)} X(e^{2\theta(s+t)} v(s+t)) \in A | \mathfrak{F}_{e^{2\theta t} v(t)}) \\
&= \mathbb{P}_{X(e^{2\theta t} v(t))}(e^{-\theta(s+t)} X(e^{2\theta(s+t)} v(s+t) - e^{2\theta t} v(t)) \in A) \\
&= \mathbb{P}_{X(e^{2\theta t} v(t))}(e^{-\theta(s+t)} X(e^{2\theta(s+t)} v(s)) \in A) \\
&= N(e^{-\theta(s+t)} X(e^{2\theta t} v(t)), v(s))(A) = N(e^{-\theta s} Y_t, v(s))(A) \\
&= K_s(Y_t, A)
\end{aligned}$$

für alle $s, t \geq 0, A \in \mathfrak{B}$, was die Behauptung impliziert. Man beachte dabei, dass

$$e^{2\theta s} v(t+s) - v(t) = e^{2\theta s} v(s)$$

gilt.