Lösung Blatt 6

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass die Chapman-Kolmogorov Eigenschaft für Kerne äquivalent ist zur Halbgruppeneigenschaft der dazugehörigen Familie von Übergangsoperatoren. Genauer formuliert betrachten wir eine Familie $(K_t)_{t\geq 0}$ von stochastischen Kernen mit $K_0(x,\cdot)=\delta_x$. Diese Familie erfüllt die Chapman-Kolmogorov Gleichung, falls

$$K_{t+s}(x,A)=\int K_s(y,A)K_t(x,dy)=\int K_t(y,A)K_s(x,dy) \tag{1}$$

gilt für alle $x\in\mathbb{R}, A\in\mathfrak{B}$. Zeigen Sie:

1. Erfüllt $(K_t)_{t\geq 0}$ die Chapman-Kolmogorov Gleichung, so wird durch

   $$T_t f(x)=\int f(y)K_t(x,dy)$$

   für alle $x\in\mathbb{R}$ eine konservative Halbgruppe positiver Kontraktionen definiert.

2. Ist $(T_t)_{t\geq 0}$ eine konservative Halbgruppe positiver Kontraktionen mit

   $$T_t f_n \downarrow 0 \quad \text{für} \quad f_n\downarrow 0$$

   für alle $t\geq 0$, so so wird durch $K_t(x,A)=T_t 1_A(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$, $A\in\mathfrak{B}$ eine Familie von stochastischen Kernen definiert, die die Chapman-Kolmogorov Gleichung erfüllt.

Zunächst wird die erste Aussage bewiesen. Klar ist, dass durch die obige Formel lineare Operatoren $(T_t): b\mathfrak{B}\to b\mathfrak{B}$ definiert werden mit $T_t 1_{\mathbb{R}}=1_{\mathbb{R}}$ für alle $t\geq 0$. Zu beachten ist, dass die Chapman Kolmogorov Gleichung auf beschränkt meßbare Funktionen erweitert werden kann zu

$$\int f(z)K_{t+s}(x,dz)=\int f(z)\int K_s(y,dz)K_t(x,dy)$$

für alle $f\in b\mathfrak{B}$. Dadurch erhält man die Halbgruppeneigenschaft mittels

$$\begin{aligned} T_{t+s}f(x) &= \int f(z)K_{t+s}(x,dz)=\int f(z)\int K_s(y,dz)K_t(x,dy)\\ &= \int T_s(f)(y)K_t(x,dy)=T_t(T_s f)(x)\end{aligned}$$

für alle $x\in\mathbb{R}$. Mittels des Satzes von der majorisierten Konvergenz folgt im übrigen für eine Folge von Funktionen f_n, die punktweise monoton fallend gegen 0 strebt, dass

$$T_t f_n(x)=\int f_n(y)K_t(x,dy)\downarrow 0.$$

Diese zusätzliche Bedingung wird benötigt, um durch

$$K_t(x, A) = T_t 1_A(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}, A \in \mathfrak{B}$ einen stochastischen Kern zu definieren. Denn dann wird durch obige Gleichung eine endlich additive Mengenfunktion definiert, die stetig in der leeren Menge und somit σ-additiv ist. Auch erhält man den Operator T_t durch Integration über den Kern wieder, denn aus $f_n \uparrow f$, folgt $f - f_n \downarrow 0$ und somit durch Anwenden des Satzes von der monotonen Konvergenz

$$T_t f(x) = \lim_{n\to\infty} T_t f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int f_n(y) K_t(x, dy) = \int f(y) K_t(x, dy).$$

Die Chapman-Kolmogorov Gleichung ergibt sich aus der Halbgruppeneigenschaft schließlich durch

$$K_{t+s}(x, A) = T_{s+t} 1_A(x) = T_t(T_s 1_A)(x) = \int T_s 1_A(y) K_t(x, dy) = \int K_s(y, A) K_t(x, dy).$$

Zu bemerken ist, dass in Anwendungen tatsächlich häufig von einer Halbgruppe von Operatoren eine Familie von Kernen konstruiert werden kann. Dies ist der Fall, wenn die Operatoren T_tKontraktionen von $C_0(\mathbb{R})$ sind. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ kann nämlich durch

$$\phi(f) = T_t f(x)$$

ein stetiges lineares Funktional von $C_0(\mathbb{R})$ definiert werden, da

$$|\phi(f)| = |T_t f(x)| \leq \sup_{y\in\mathbb{R}} |T_t f(y)| \leq ||T_t|| ||f||_\infty \leq ||f||_\infty$$

Die stetigen linearen Funktionale von $C_0(\mathbb{R})$ kann mit dem Raum der endlichen signierten Maße identifiziert werden. Es gibt also ein endliches signiertes Maß $V_t(x, \cdot)$ mit

$$T_t f(x) = \int f(y) V_t(x, dy)$$

für alle $f \in C_0(\mathbb{R})$. Aus der Posotivität von T_t folgt, dass $V_t(x, \cdot)$ ein endliches Maß ist, was wegen $||T_t|| = 1$ zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß wird. Mit Hilfe dieser stochastischen Kerne können dann die Operatoren zu einer konservativen Halbgruppe positiver Kontraktionen auf $b\mathfrak{B}$ fortgesetzt werden.

Aufgabe 2

Definiere die folgende Familie von stochastischen Kernen $(K_t)_{t\geq 0}$ durch $K_0(x, \cdot) = \delta_x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$K_t(x, A) = N(x + bt, \sigma^2 t)(A)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathfrak{B}$. Hierbei sind $b \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ vorgegebene Konstanten. Zeigen Sie, dass diese Familie von stochastischen Kernen die Chapman-Kolmogorov Gleichung erfüllt. Bestimmen Sie die Übergangsdichten, also die Funktion $q(t; x, y)$ mit $K_t(x, A) = \int_A q(t; x, y)dy$. Welche partielle Differentialgleichung erfüllt $(t, y) \to q(t; (x, y))$?

Eine Möglichkeit, die Chapman-Kolmogorov Gleichung zu zeigen, besteht darin, diese auf die Brownsche Übergangsdichte zurückzuführen. Es gilt

$$K_t(x,A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x+bt-y}{\sigma\sqrt{t}})^2)dy,$$

was $q(t;x,y) = p(t;x+bt,y) = p(t;x,y-bt)$ für die Übergangsdichte impliziert. Hierbei bezeichnet $p(t;x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-y}{\sigma\sqrt{t}})^2)$ die Übergangsdichte einer Brownschen Bewegung mit Diffusionskonstante σ^2. Man erhält

$$\begin{aligned} q(t+s;x,y) &= p(t+s;x+b(t+s),y) = p(t+s;x+bt,y-bs) \\ &= \int p(s;z,y-s)p(t;x+bt,z)dz = \int q(s;z,y)q(t;x,z)dz \end{aligned}$$

was die Chapman-Kolmogorov Gleichung der Übergangsdichten und damit der Kerne impliziert. Die partielle Differentialgleichung, die q erfüllt, erhält man aus der Wärmeleitungsgleichung folgendermaßen

$$\begin{aligned} \partial_t q(t,x,y) &= \partial_t p(t,x,y-bt) - b\partial_y p(t,x,y-bt) \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2\partial_y^2 p(t,x,y-bt) - b\partial_y p(t,x,y-bt) \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2\partial_y^2 q(t,x,y) - b\partial_y q(t,x,y) \end{aligned}$$

Zu bemerken ist, dass man aus einer Brownschen Bewegung X eine mit Drift b erhält durch $Y_t = X_t + bt$ für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 3

Definiere eine Familie $(K_t)_{t\geq 0}$ von stochastischen Kernen durch $K_0(x,\cdot) = \delta_x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$K_t(x,A) = N(xe^{-\theta t}, \frac{\sigma^2}{2\theta}(1-e^{-2\theta t}))(A)$$

für alle $t > 0$,$x \in \mathbb{R}$. Dabei sind $\theta, \sigma > 0$ vorweg gegebene Konstanten.

Zeigen Sie, dass diese Familie die Chapman-Kolmogorov Gleichung erfüllt. Bestimmen Sie die Übergangsdichten $p(t;x,y)$ und die partielle Differentialgleichung, die $(t,y) \to p(t;x,y)$ erfüllt.

Man kann auch hier die Chapman-Kolmogorov Gleichung auf die der Brownschen Bewegung zurückführen. Bezeichnen wir mit q die Übergangsdichte des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses und mit p die einer Brownschen Bewegung mit Diffusionskonstante 1, so erkennt man den Zusammenhang

$$q(t,x,y) = p(v(t), xe^{-\theta t}, y)$$

mit $v(t) = \frac{\sigma^2}{2\theta}(1-e^{-2\theta t})$. Man beachte, dass

$$v(t+s) - v(t)e^{-2\theta s} = v(s)$$

gilt, so dass folgt

$$\int q(s,z,y)q(t,x,z)dz = \int p(v(s), e^{-\theta s}z, y)p(v(t), e^{-\theta t}x, z)dz$$

$$
\begin{aligned}
&= \int p(v(s), e^{-\theta s}z, y)\frac{1}{\sqrt{2\pi v(t)}}\exp(-\frac{1}{2v(t)}(e^{-\theta t}x - z)^2 dz \\
&= \int p(v(s), e^{-\theta s}z, y)\frac{1}{\sqrt{2\pi v(t)}}\exp(-\frac{1}{2v(t)}e^{2\theta s}(e^{-\theta(t+s)}x - e^{-\theta s}z)^2 dz \\
&= \int p(v(s), u, y)\frac{1}{\sqrt{2\pi v(t)}}e^{\theta s}\exp(-\frac{1}{2v(t)}e^{2\theta s}(e^{-\theta(t+s)}x - u)^2 du \\
&= \int p(v(s), u, y)\frac{1}{\sqrt{2\pi v(t)}}p(v(t)e^{-2\theta s}, xe^{-\theta(t+s)}, u)du \\
&= \int p(v(t+s) - v(t)e^{-2\theta s}, u, y)p(v(t)e^{-2\theta s}, xe^{-\theta(t+s)}, u)du \\
&= p(v(t+s), xe^{-\theta(t+s)}, y) = q(t+s, x, y)
\end{aligned}
$$

Durch Nachrechnen kann man feststellen, dass die Übergangsdichte q des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses als Funktion von (t, y) die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t q(t, x, y) = \theta \partial_y (yq(t, x, y)) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_y^2 q(t, x, y)$$

mit Anfangsbedingung δ_x erfüllt.

Zu bemerken ist, dass man aus einer Brownschen Bewegung X durch

$$Y_t = \exp(-\theta t)X(e^{2\theta t}v(t))$$

einen Ornstein-Uhlenbeck Prozeß gewinnen kann.