Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2012/13

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 12** **08.01.2013**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Seien M ein L_2-Martingal mit cádlág Pfaden auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum und σ, τ Stopzeiten, die nur endlich viele Werte annehmen können, so dass $\sigma \leq \tau$ gilt. Zeigen Sie

$$\int 1_F 1_{(\sigma,\tau]} dM = 1_F(M_\tau - M_\sigma).$$

für alle $F \in \mathfrak{F}_\sigma$.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Zeigen Sie, dass für einen Wiener-Prozeß W und $T > 0$

$$\int W 1_{(0,T]} dW = \frac{1}{2}(W_T^2 - T)$$

gilt.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Für einen Wiener-Prozeß W und $a \in \mathbb{R}$ sei die Stopzeit τ_a definiert durch

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 : W_t = a\}.$$

Berechnen Sie für $a, b > 0$ das Doleans-Maß der stochastischen Intervalle $(0, \tau_b]$, $(0, \tau_b \wedge \tau_{-a}]$.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei M ein L_2-Martingal mit cadlag Pfaden.

1. Zeigen Sie, dass M L_2-stetig von rechts ist. Dies bedeutet, dass

   $$\mathbb{E}(M_{t+h} - M_t)^2 \to 0 \text{ für } h \downarrow 0$$

   gilt für alle $t \geq 0$.

2. Zeigen Sie, dass für eine aufsteigende Folge von Stopzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sup \tau_n = \infty$ gilt

   $$\mathbb{E}(M_T - M_{T\wedge\tau_n})^2 \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Abgabe: Die. 15.01.2013 bis spätestens 11.00 im Fach 54 (Torres), Fach 55 (Blank)