Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2012/13

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 10** **10.12.2012**

Aufgabe 1: Optional Sampling Theorem für Submartingale 4 Punkte

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Submartingal bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$. Zeigen Sie:

1. Ist τ eine Stopzeit mit $\tau \leq T$ für ein $T > 0$, so gilt $X_\tau \leq \mathbb{E}(X_T|\mathfrak{F}_\tau)$. Insbesondere folgt damit $\mathbb{E}X_\tau \leq \mathbb{E}X_T$.
2. Ist N ein gleichgradig integrierbares Submartingal, so existiert eine integrierbare $\mathfrak{F}_\infty$ meßbare Zufallsvariable N_∞ mit $N_t \leq \mathbb{E}(N_\infty|\mathfrak{F}_t)$ $\mathbb{P}$-fast sicher für alle $t \geq 0$. Weiter gilt $N_\tau \leq \mathbb{E}(N_\infty|\mathfrak{F}_\tau)$ und damit insbesondere $\mathbb{E}N_\tau \leq \mathbb{E}N_\infty$ für jede Stopzeit τ .

Aufgabe 2: Anwendung Optional Sampling 4 Punkte

Sei $(M_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal mit cadlag Pfaden und τ eine Stopzeit mit

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1 \quad , \quad \mathbb{E}|M_\tau| < \infty \quad , \quad \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}|M_t|1_{\{\tau > t\}} = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0$ gilt.

Wenden Sie dies auf den Wiener-Prozeß an für den Nachweis, dass $\mathbb{E}\,\tau_{ab} = ab$ gilt für alle $a, b > 0$. Hierbei ist τ_{ab} der erste Zeitpunkt, an dem der Wiener-Prozeß den Wert $-a$ oder b erreicht.

Aufgabe 3: Doobsche Maximalidentität 4 Punkte

Sei $(M_t)_{t\geq 0}$ ein $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ Martingal mit stetigen Pfaden , das $M_t \geq 0$ für alle $t \geq 0$ und $\lim_{t\to\infty} M_t = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher erfüllt. Zeigen Sie, dass dann für alle $a > 0$ gilt

$$\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} M_t \geq a|\mathfrak{F}_0) = 1_{\{M_0\geq a\}} + \frac{M_0}{a} 1_{\{M_0<a\}}.$$

Zeigen Sie weiter

1. $\mathbb{P}(\sup_{t\geq T} M_t < a|\mathfrak{F}_T) = (1 - \frac{M_T}{a})^+$ für alle $T \geq 0$,
2. $\mathbb{E}(K - M_T)^+ = K\mathbb{P}(\lambda_K < T)$

Hierbei ist die letzte Besuchszeit bei $K > 0$ definiert durch

$$\lambda_K = \sup\{t \geq 0 : M_t = K\}, \quad \sup\emptyset = 0.$$

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozeß bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$. Definiere für $\sigma > 0$ den Prozeß S durch $S_t = \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$ für alle $t \geq 0$. Berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabe 3 für $K > 0$ die Verteilungsfunktion der letzten Besuchszeit in K durch S. Diese ist durch

$$\lambda_K = \sup\{t \geq 0 : S_t = K\}, \quad \sup \emptyset = 0.$$

gegeben.

Abgabe: Die. 18.12.2012 bis spätestens 11.00 im Fach 54 (Torres), Fach 55 (Blank)