Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2012/13

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 09** **03.12.2012**

Blumenthalsches 0-1 Gesetz: Die in der Vorlesung angegebene Form des Blumenthalschen 0-1 Gesetzes ist nur korrekt für Anfangsverteilungen der Form $\mu = \delta_x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für beliebige Anfangsverteilungen ist die Aussage falsch. Ich gebe deshalb hier nochmals die korrekte Fassung des Gesetzes an. Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}_x)$, welche aus $x \in \mathbb{R}$ startet. Dann gilt $\mathbb{P}_x(A) \in \{0,1\}$ für jedes $A \in \mathfrak{F}^X_{0+}$.

Beweis: Für $A \in \mathfrak{F}^X_{0+}$ existiert ein Ereignis $B \in \mathfrak{B}_{0+}$ mit $A = \{\omega : X(\omega) \in B)$. Deshalb folgt mit der Markov-Eigenschaft

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(A) &= \mathbb{P}_x(A \cap A) = \mathbb{P}_x(A \cap \{X \in B\}) \\ &= \mathbb{E}_x 1_A \mathbb{P}_{X_0}(X \in B) = \mathbb{E}_x 1_A \mathbb{P}_x(X \in B) = \mathbb{P}_x(A)^2, \end{aligned}$$

was die Behauptung impliziert.

In diesem Zusammenhang kann man darauf hinweisen, wie man von Projektionen erzeugte σ-Algebren zur Bestimmung von $\mathfrak{F}^X_t$ benutzen kann. Betrachte also auf $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathfrak{B}^{[0,\infty)})$ die Projektionen

$$\pi_t : \mathbb{R}^{[0,\infty)} \to \mathbb{R}; f \to f(t)$$

für alle $t \geq 0$ und setze $\mathfrak{B}_t = \sigma(\pi_s : s \leq t)$ für alle $t \geq 0$. Dann gilt

$$\mathfrak{F}^X_t = X^{-1}(\mathfrak{B}_t) \quad , \quad \mathfrak{F}^X_{t+} = X^{-1}(\mathfrak{B}_{t+})$$

für alle $t \geq 0$

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Setze $\mathbb{P}_x = \mathbb{P}(\cdot | X_0 = x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Definiere

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \inf\{t > 0 : X_t > 0\} \\ \tau_2 &= \inf\{t > 0 : X_t < 0\} \\ \tau_3 &= \inf\{t > 0 : X_t = 0\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie

(i) Jedes τ_i ist eine $(\mathfrak{F}^X_{t+})_{t\geq 0}$ Stopzeit.

(ii) $\mathbb{P}_0(\tau_1 = 0) = \mathbb{P}_0(\tau_2 = 0) = \mathbb{P}_0(\tau_3 = 0) = 1$.

(iii) $\mathbb{P}_x(\tau_1 > 0) = 1 = \mathbb{P}_x(\tau_3 > 0)$ für alle $x < 0$

(iv) $\mathbb{P}_x(\tau_2 > 0) = 1 = \mathbb{P}_x(\tau_3 > 0)$ für alle $x > 0$.

(v) Ist $\mu = N(0,1)$, so ist $\mathbb{P}_\mu(\tau_1 = 0) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}_\mu(\tau_2 = 0)$.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie

1. τ is eine $(\mathfrak{F}_{t+})_{t\geq 0}$ Stopzeit genau dann, wenn $\{\tau < t\} \in \mathfrak{F}_t$ für alle $t \geq 0$.
2. Sind σ, τ Stopzeiten bezüglich $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$, so auch $\sigma + \tau$.
3. Sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ Stopzeiten. Was können Sie über $\sup_n \tau_n$ und $\inf_n \tau_n$ aussagen?

Aufgabe 3: 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ definierter Wiener-Prozeß. Definiere die Menge der Nulldurchläufe durch

$$N = \{(s, \omega) : W_s(\omega) = 0\}.$$

Zeigen Sie:

1. N ist eine meßbare Teilmenge von $\mathfrak{B}([0,\infty)) \otimes \mathfrak{F}_\infty$.
2. $\lambda(\{s : W_s(\omega) = 0\}) = 0\mathbb{P}$-fast sicher.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und seien τ, σ Stopzeiten. Zeigen Sie:

1. $\mathfrak{F}_{\tau\wedge\sigma} = \mathfrak{F}_\tau \cap \mathfrak{F}_\sigma$
2. $\{\tau < \sigma\}, \{\sigma < \tau\}, \{\tau \leq \sigma\}, \{\sigma \leq \tau\}, \{\tau = \sigma\}$ sind Ereignisse aus $\mathfrak{F}_{\tau\wedge\sigma}$.

Abgabe: Die. 11.12.2012 bis spätestens 11.00 im Fach 54 (Torres), Fach 55 (Blank)